

CONCENTRAREA TENSIUNILOR ÎN ARBORI CU VARIAȚII DE DIAMETRU. STUDIU ANALITIC, NUMERIC ȘI EXPERIMENTAL

NICULAE Andrei Laurențiu¹, DUȚU Silvia-Alexandra², CONȚIU Rareș²

Conducători științifici : prof. dr. ing. Adriana SANDU, Prof. dr. ing. Marin SANDU

REZUMAT: În lucrare se efectuează un studiu analitic, numeric și experimental al fenomenului de concentrare a tensiunilor în arbori tubulari cu variații de diametru. Valorile factorilor de concentrare a tensiunilor determinate analitic, pentru solicitări simple de încovoiere și de torsiune, au fost utilizate pentru determinarea factorului de concentrare a tensiunii la solicitarea compusă. Rezultatele obținute au fost validate prin simulare numerică, cu metoda elementelor finite. S-a constatat o bună concordanță între rezultatele calcului analitic și cele obținute prin simulare numerică în cele trei cazuri de încărcare studiate.

În cazul solicitării la încovoiere validarea modelelor de calcul s-a realizat și experimental, folosind tensometria electrică rezistivă.

CUVINTE CHEIE: concentrator de tensiune, metoda elementelor finite, tensometrie electrică rezistivă

1 INTRODUCERE

Calculul de predimensionare al arborilor este mai precis dacă se ține cont de efectul local din zonele cu variații ale secțiunii transversale. Aceasta deoarece durata de viață a arborelui este puternic influențată de existența unor concentratori de tensiune [Gooyer, Overbeeke (1991)], [Sonmez (2009)].

În zonele unde rigiditatea arborelui are o variație bruscă, gradientul tensiunii crește rapid. Factorul de concentrare a tensiunii este definit de relația [Iliescu, Atanasiu, Sandu, 2002] :

$$K_t = \frac{S_{\max}}{S_n} \Rightarrow S_{\max} = K_t \cdot S_n, \quad (1)$$

unde:

S_{\max} este tensiunea locală maximă, care poate fi tensiunea normală (în cazul încovoierii), tensiunea tangențială (în cazul torsiunii) sau o tensiune echivalentă, determinată cu o teorie de rezistență, în cazul solicitării compuse;

S_n este tensiunea nominală (normală, tangențială sau echivalentă), determinată în secțiunea critică, neglijând efectul local.

Soluții analitice pentru calculul factorilor de concentrare a tensiunilor au fost stabilite într-o serie de lucrări clasice, ca de exemplu [Neuber, 1958], pentru structuri axial-simetrice, supuse la încovoiere sau torsiune.

Determinarea factorilor de concentrare a tensiunii din arbori cu secțiune circulară, cu rază de racordare la trecerea dintre tronsoane, s-a realizat folosind metoda fotoelasticității [Frocht, 1935].

O altă tehnică experimentală utilizată pentru determinarea factorilor de concentrare a tensiunilor la arbori supuși la solicitări simple de încovoiere sau de torsiune este tensometria electrică rezistivă [Mocanu, 1976].

Pe bază rezultatelor experimentale au fost stabilite formule empirice de calcul al factorilor de concentrare a tensiunii pentru arbori cu secțiune inelară și rază de racordare, în cazul solicitărilor simple (torsiune sau încovoiere) [Peterson, 1974].

În [Iliescu, Atanasiu, Sandu, 2002] se propune o metodă de calcul al coeficientului de concentrare a tensiunilor în cazul arborilor tubulari cu rază de racordare (Fig. 1), supuși la solicitare combinată de torsiune și încovoiere, pe baza teoriilor clasice de rezistență, pornind de la valorile factorilor de concentrare a tensiunilor date în literatură pentru solicitările simple componente.

În această lucrare se compară rezultatele calculului analitic cu cele obținute prin calcul numeric, cu metoda elementelor finite, și cu valori determinate experimental, folosind metoda tensometriei electrice.

¹Specializarea Sisteme și Echipamente Termice, Anul 3A; Facultatea de Inginerie Mecanică și Mecatronică;
E-mail: Niculae Andrei Laurențiu:
andreilaurentiu_niculae@yahoo.com

²Specializarea Sisteme și Echipamente Termice, Anul 2A; Facultatea de Inginerie Mecanică și Mecatronică

2 CALCULUL ANALITIC

Tensiunile normale și tangențiale maxime în zona concentratorului de tensiune (zona de modificare a diametrului exterior, cu racordare) sunt:

$$\sigma_{\max} = K_{\hat{n}} \cdot \sigma_n; \tau_{\max} = K_{\hat{t}} \cdot \tau_n \quad (2)$$

În (2) s-au utilizat următoarele notații:

$K_{\hat{n}}$ și $K_{\hat{t}}$ sunt factorii de concentrare a tensiunii pentru încovoiere și, respectiv, pentru torsiune;

σ_n și τ_n sunt tensiunile nominale, care se calculează cu relațiile:

$$\sigma_n = \frac{M_{\hat{i}}}{W_y}; \tau_n = \frac{M_t}{2W_y} \quad (3)$$

$M_{\hat{i}}$ și M_t sunt momentele de încovoiere și, respectiv, de torsiune;

W_y este modulul de rezistență axial pentru secțiunea transversală inelară:

$$W_y = \frac{\pi}{32} d_e^3 \left[1 - \left(\frac{d_i}{d_e} \right)^4 \right]; \quad (4)$$

Expresiile factorilor de concentrare a tensiunilor [Iliescu, Atanasiu, Sandu, 2002] sunt:

-pentru încovoiere

$$k_{\hat{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{a} \cdot \left(\frac{0.2}{B_1} + \frac{0.25b^2}{1-b^4} \right) + 5.4a^4\sqrt{a}}}, \quad (5)$$

-pentru torsiune

$$K_{\hat{t}} = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} \cdot \left(\frac{0.8}{B_2} + \frac{0.25b^2}{1-b^4} \right) + 9\sqrt{a^3}}}, \quad (6)$$

unde:

$$a = \frac{r}{d}; b = \frac{d_i}{d_e}; c = \frac{D}{d_e}; A_1 = A_2 = \frac{c-1}{2c};$$

$$B_1 = \sqrt{A_1} \left(1 - \frac{2}{3} A_1 \right); B_2 = \sqrt[3]{A_2^2} \left(1 - 0.8 A_2 \right).$$

În cazul solicitării compuse la încovoiere și torsiune se poate utiliza criteriul deformațiilor specifice maxime (teoria a II-a de rezistență), pentru materiale fragile și teoria energiei specifice maxime de deformație (teoria von Mises) pentru materiale ductile.

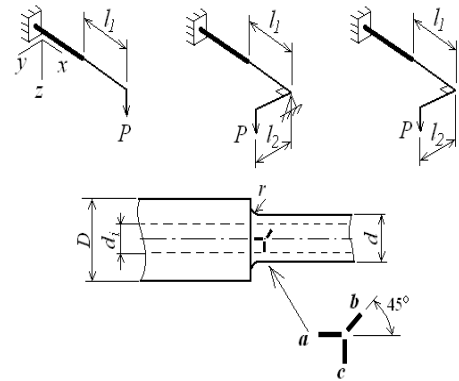


Fig. 1 Structura studiată și cazurile de încărcare

Tensiunea echivalentă calculată cu teoria deformațiilor specifice maxime este:

$$\sigma_{echiv,II} = \frac{1-\nu}{2} \sigma + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (7)$$

unde ν este coeficientul de contracție transversală (coeficientul lui Poisson).

Rezultă:

$$\begin{aligned} \sigma_{echiv,n} &= \frac{1-\nu}{2} \sigma_n + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma_n^2 + 4\tau_n^2} = \\ &= \frac{1-\nu}{2} (1 + \psi \sqrt{1+x^2}) \frac{M_{\hat{i}}}{W_y} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{echiv,max} &= \frac{1-\nu}{2} \sigma_{\max} + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4\tau_{\max}^2} = \\ &= \frac{1-\nu}{2} (K_{\hat{n}} + \psi \sqrt{K_{\hat{n}}^2 + x^2 K_{\hat{t}}^2}) \frac{M_{\hat{i}}}{W_y} \end{aligned} \quad (9)$$

S-a notat:

$$x = \frac{M_t}{M_{\hat{i}}}; \psi = \frac{1+\nu}{1-\nu}.$$

Deoarece relația între tensiunea locală maximă și cea nominală este de forma (1), se poate scrie:

$$\sigma_{echiv,max} = K_{tc} \cdot \sigma_{echiv,n}, \quad (10)$$

Din relațiile (9)-(10) rezultă expresia: factorului de concentrare a tensiunilor pentru solicitarea compusă, conform teoriei a II-a de rezistență:

$$K_{tc,II} = \frac{K_{\hat{n}} + \psi \sqrt{K_{\hat{n}}^2 + x^2 K_{tt}^2}}{1 + \psi \sqrt{1 + x^2}} \quad (11)$$

În cazul materialelor ductile se utilizează teoria de rezistență von Mises, parcurgându-se aceiași pași:

$$\sigma_{echiv,vM} = \sqrt{\sigma_n^2 + 3\tau_n^2}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} \sigma_{echiv,n} &= \sqrt{\sigma_n^2 + 3\tau_n^2} = \\ &= \sqrt{1 + 0.75 \cdot x^2} \cdot \frac{M_1}{W_y} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{echiv,max} &= \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\tau_{max}^2} = \\ &= \sqrt{K_{tt}^2 + 0.75 \cdot x^2 K_{tt}^2} \cdot \frac{M_1}{W_y} \end{aligned} \quad (13)$$

În final, factorul de concentrare a tensiunilor pentru o solicitare la încovoiere și torsiune, conform teoriei von Mises, este:

$$K_{tc,vM} = \sqrt{\frac{K_{\hat{n}}^2 + 0.75 \cdot x^2 K_{tt}^2}{1 + 0.75 \cdot x^2}} \quad (14)$$

În tabelul 1 se prezintă rezultatele obținute utilizând relațiile (2)-(14) pentru cazul $x=1$ ($M_i=M_t=5 \cdot 10^4$ N·mm) în cazul unui arbore cu dimensiunile: $d_e=35$ mm, $D=48$ mm, $d_i= 21$ mm, $r= 6$ mm.

Arborele este realizat din oțel, cu modulul de elasticitate $E=2.1 \cdot 10^5$ MPa și coeficientul lui Poisson $\nu=0.3$.

Tabelul 1. Rezultatele calculului analitic

Caz de solicitare		Tensiuni nominale [MPa]	Tensiuni locale maxime [MPa]
Încovoiere		13.65	19.91
Torsiune		6.83	8.58
Solicitare compusă	Teoria a II-a	17.32	24.06
	Teoria von Mises	18.05	24.85

3 CALCUL NUMERIC

Validarea relațiilor de calcul s-a realizat printr-o analiză cu elemente finite.

S-a utilizat programul SolidWorks 2013/CosmosM/Geostar256K. Structura a fost discretizată în 152840 de elemente de tip TETRA4, interconectate în 30834 de noduri.

Arborele s-a considerat încastrat la capătul cu diametru exterior mai mare. La capătul liber s-au aplicat sarcini care să simuleze cele trei cazuri de încărcare din figura 1:

1) *încovoiere*- o sarcină uniform distribuită pe suprafața liberă a arborelui, a cărei rezultantă să producă în secțiunea cu concentrator un moment egal cu cel din calculul analitic ($M_i=5 \cdot 10^4$ N·mm)

2) *torsiune*: forțe concentrate, tangente la contur, care să producă un moment de torsiune ($M_t=5 \cdot 10^4$ N·mm).

3) *solicitare compusă*, prin combinarea primelor două cazuri de încărcare.

În figura 2 sunt prezentate rezultatele simulării numerice în cazul încovoierii.

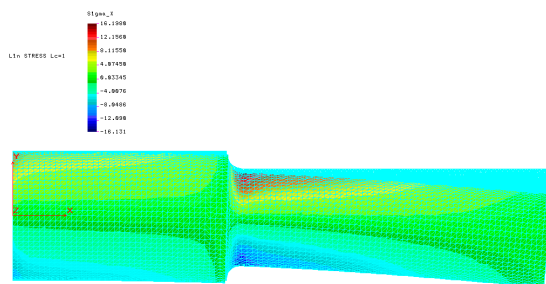
În figura 2,a se prezintă distribuția tensiunilor normale σ_x pe structura deformată, iar în figura 2,b un detaliu al zonei concentratorului de torsiune și diagrama care evidențiază tensiunea locală maximă.

Se constată că valoarea maximă a tensiunii normale la racordare (16.2 MPa) este mai mică decât cea calculată analitic (19.91 MPa, a se vedea Tabelul 1). Acest fapt se explică prin faptul că modelul de calcul numeric este, de regulă, mai rigid decât structura reală. O discretizare mai fină în zona cu concentrator ar permite o mai corectă evaluare a acestei tensiuni.

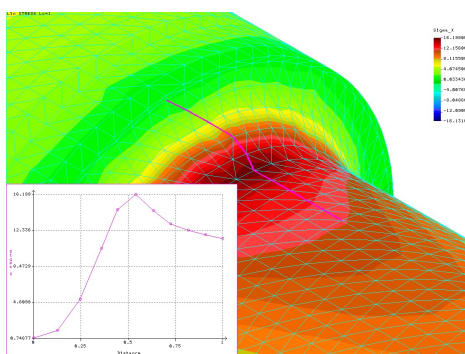
În figura 3 se prezintă rezultatele simulării numerice în cazul torsiunii. Se prezintă un detaliu conținând zona cu variație de diametru. Valoarea maximă a tensiunii tangențiale este de 7.02 MPa, de asemenea inferioară celei calculate analitic.

În figura 4 sunt prezentate rezultatele simulării numerice în cazul solicitării compuse la încovoiere și torsiune.

S-a reprezentat distribuția tensiunilor echivalente von Mises în zona concentratorului de torsiune.



a)



b)

Fig.2 Distribuția tensiunilor normale în cazul 1 de încărcare (încovoiere).

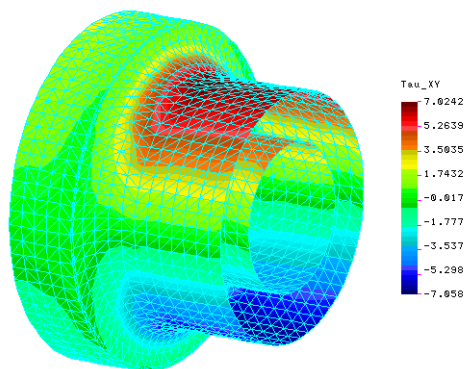


Fig.3 Distribuția tensiunilor tangențiale în cazul 2 de încărcare (torsiune)

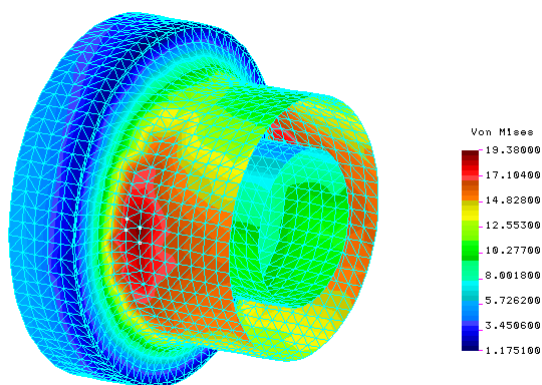


Fig.4. Distribuția tensiunilor echivalente von Mises în cazul solicitării compuse

4 STUDIU EXPERIMENTAL

Validarea relațiilor de calcul se poate face experimental, utilizând tehnica tensometriei electrice rezistive.

În zona concentratorului de tensiune au fost lipite trei traductoare rezistive, conform Fig.1.

În figura 5a se prezintă standul experimental pentru încercarea la încovoiere, iar în figura 5b, un detaliu conținând arborele cu traductoarele rezistive lipite în zona de interes.



a)



b)

Fig.5 Standul experimental

Deformațiile specifice pe direcțiile *a*, *b*, *c* ale traductoarelor rezistive (Fig.1) citite la puntea tensometrică, după încărcarea cu greutatea conform figurii 6,a, permit calculul tensiunilor principale și determinarea direcțiilor principale cu relațiile:

$$\sigma_{1,2} = \frac{E \varepsilon_a + \varepsilon_c}{2(1-\nu)} \pm \frac{E}{2} \left(\frac{1}{1+\nu} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c)^2} \right) \quad (15)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c} \quad (16)$$

Pe baza valorilor tensiunilor principale σ_1 și σ_2 , se pot calcula apoi tensiunile echivalente:

- cu teoria deformațiilor specifice maxime (teoria a II-a de rezistență),

$$\sigma_{eq,max} = \sigma_1 - \nu \sigma_2 \quad (17)$$

- cu teoria von Mises,

$$\sigma_{eq,max} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad (18)$$

În figura 6 se prezintă diagramele de variație ale tensiunii principale σ_1 , calculată cu relația (15), în funcție de momentul încovoietor din secțiunea periculoasă, determinat în funcție de sarcina aplicată experimental.

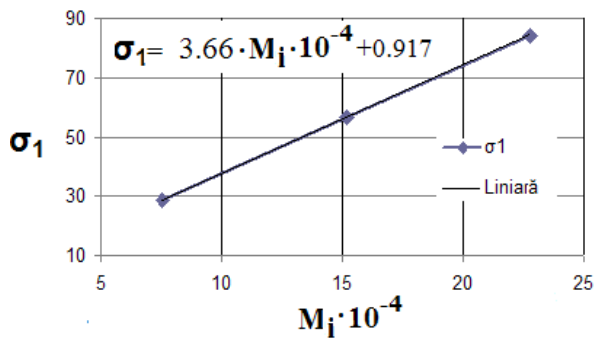


Fig.6 Diagrama de variație a tensiunii principale σ_1 determinată experimental

Diagrama din figura 6 a fost liniarizată, pentru a permite determinarea tensiunii principale σ_1 (tensiunea maximă locală) pentru diferite valori ale momentelor încovoietoare, prin extrapolare.

Pentru un moment încovoietor egal cu cel considerat în calculul analitic și în simularea numerică ($M_i=5 \cdot 10^4$ N·mm), s-a obținut $\sigma_1 = \sigma_x = 19.21$ MPa.

Se constată că această valoare este foarte apropiată de cea calculată analitic (tabelul 1), ceea ce confirmă corectitudinea relațiilor analitice.

5 CONCLUZII

5.1. Se constată o bună concordanță între rezultatele obținute în urma celor trei abordări (analitică, numerică și experimentală), care sunt complementare și se susțin reciproc.

5.2. Simularea numerică conduce la rezultate corecte dacă se rafinează discretizarea în zona concentratorului de tensiune (discretizare adaptivă).

5.3. Deoarece între valorile calculate analitic ale tensiunilor maxime din zona racordării și cele determinate experimental apar diferențe foarte mici (sub 10%), algoritmul de calcul analitic descris în Capitolul 2 poate fi folosit în proiectarea structurilor de acest fel.

6 BIBLIOGRAFIE

- [1]. Gooyer L.E., Overbeeke J.L. (1991), „The stress distributions in shouldered shafts under axisymmetric loadings”, J. of Strain Analysis for Engineering Design, 26(3), pp. 181-184
- [2] Sonmez F.O. (2009), „Optimal shape design of shoulder fillets for flat and round bars under various loadings”, Proceeding of IMechE 2009, vol 223, part C, pp. 1741-1754 (J. Mech. Eng.Sci.)
- [3] Iliescu N., Atanasiu C. și Sandu M. (2002) "Stress concentration in shouldered tubular shafts", The 9th International Symposium on Experimental Stress Analysis and Material Testing, Bucuresti - Constanța, Mai - June 2002
- [4]. Neuber H., Kerbspannungslehre, Springer-Verlag, Berlin, 1958
- [5]. Frocht M. M., „Factors of Stress Concentration Photoelastically Determined, J.A.M., no.2/ 1935
- [6]. Mocanu D.R. (1977), „Analiza experimentală a tensiunilor”, Editura Tehnică, București,
- [7]. Peterson R.E. (1974) „Stress Concentration Factors”, New York