

MODELUL MATEMATIC PENTRU ROBOTUL DE TIP MECANISM PENTAGONAL CU ARHITECTURA PARALELA

CRISTEA George Viorel¹, IONIȚĂ Iris², CONSTANTIN Mihnea Adrian³

Conducator stiintific: Ș.l. dr. ing. **Andrei Mario IVAN**

REZUMAT: In acest articol va fi prezenta in ce a constat lucrarea, obiectivele ei, rezolvarea amanuntita a acesteia, robotul corespondent modelului matematic, de altfel , care este si tema proiectului, la ce ne ajuta aceasta rezolvare, precum si meritele exterioare pentru acesta. Am realizat aceasta lucrare la cererea de ajutor a domnului profesor Andrei Mario Ivan. Aceasta fiind reusita, am decis impreuna sa fie prezentata Sesiunea Stiintifica Studenteasca.

CUVINTE CHEIE: robotica, geometrie, matematica, numere complexe, model geometric.

1 INTRODUCERE

Aceasta lucrare are ca scop functionarea optima a unui robot de tip mecanism pentagonal cu arhitectura paralela, rezolvand matematic modelul direct si cel invers. Acest lucru este posibil cu ajutorul numerelor complexe (Craig 2005), diferite teoreme si functii trigonometrice (Nicolescu, 2005). Cea directa consta in determinarea coordonatelor unui punct stiind unghiurile α si β , precum si lungimile l_1 , respectiv l_2 , pe de alta parte la modelul invers fiind stiute coordonatele punctului si lungimile l_1 , l_2 trebuie aflate unghiurile α si β (Siciliano & Khatib, 2008) (Ivan, 2011).

Lucrarea a fost dezvoltată pentru a realiza controlul pozitiei si traiectoriei robotului de tip mecanism pentagonal existent in dotarea departamentului MSP. Dupa realizarea modelelor geometrice direct si invers, acestea vor fi implementate in controller-ul robotului. Utilitatea modelului geometric direct consta in faptul ca, odata implementat in controller, acesta permite calcularea si afisarea in timp real a coordonatelor efectorului. Totodata, utilitatea modelului geometric invers consta in faptul ca, odata implementat in controller, acesta permite comanda directa, prin instructiune de miscare in program, a pozitiei efectorului, robotul calculand pozitiile necesare pentru cele doua axe.

¹ Specializarea Robotică, Facultatea de Ingineria si Managementul Sistemelor Tehnologice;

E-mail: cristea.george.viorel@gmail.com;

² Specializarea Robotică, Facultatea de Ingineria si Managementul Sistemelor Tehnologice;

E-mail: iris_maria2007@yahoo.com;

³ Clasa a X-a, Colegiul National de Informatica „Tudor Vianu”;

E-mail: ama@ziwa.ro;

2 STADIUL ACTUAL

La momentul actual, modelul geometric direct și modelul geometric invers pentru mecanisme de tip pentagonal sunt formulate matematic la modul general in literatura de specialitate (Dorin & Dobrescu, 1998), însă pentru a putea controla în poziție robotul existent în dotarea departamentului MSP era necesară dezvoltarea unor modele particularizate pentru acesta (Campa s.a, 2006). Ulterior, aceste modele vor fi implementate in controller.

3 FORMULAREA PROBLEMEI

Modelul direct: Se da desenul din figura 1. Sa se afle coordonatele x si y ale punctului P stiind ca unghiurile α si β , precum si lungimile L_1 si L_2 sunt cunoscute. De asemenea, originea sistemului de coordonate XY se afla la jumatatea distantei L_2 . Cu alte cuvinte, coordonatele x si y ale punctului P trebuie exprimate matematic in functie de α , β , L_1 si L_2 (modelul geometric direct pentru mecanism de tip pentagonal) (Nof, 1999).

Modelul invers: Se da desenul din figura 1. Sa se afle unghiurile α si β stiind ca lungimile L_1 si L_2 , precum si coordonatele x si y ale punctului P sunt cunoscute. De asemenea, originea sistemului de coordonate XY se afla la jumatatea distantei L_2 . Cu alte cuvinte, unghiurile α si β trebuie exprimate matematic in functie de coordonatele x si y ale punctului P , L_1 si L_2 (modelul geometric invers pentru mecanism de tip pentagonal).

4 MODELUL GEOMETRIC DIRECT

Avem distanta t_3 intre C si D , plecand din aceste 2 puncte 2 tije de lungime l_1 ale caror varfuri trebuie sa coincida. Fie F mijlocul lui CD ; construim mediatoarea lui CD astfel incat P sa se afle pe aceasta iar $CP=l_1$, si implicit $PD=l_1$.

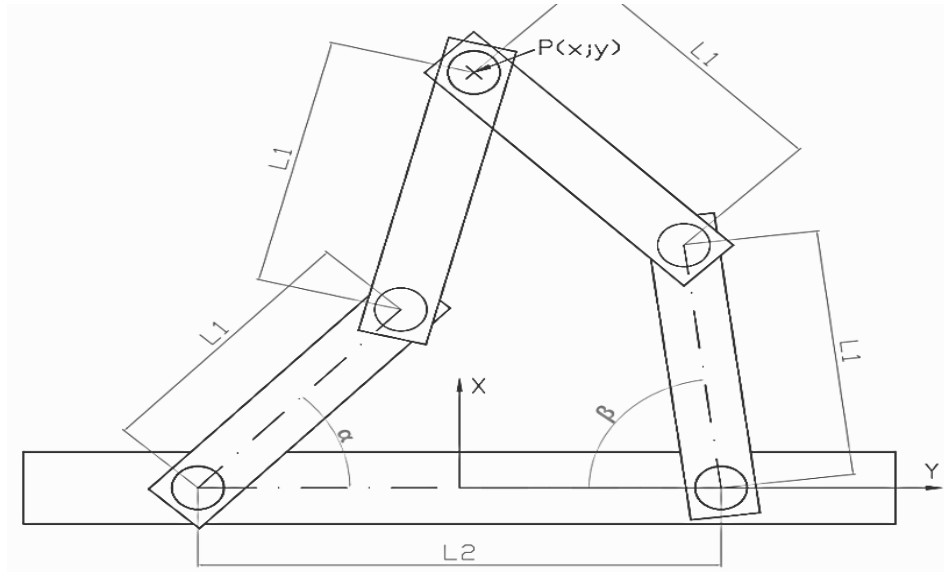


Fig. 1. Schema cinematică a robotului

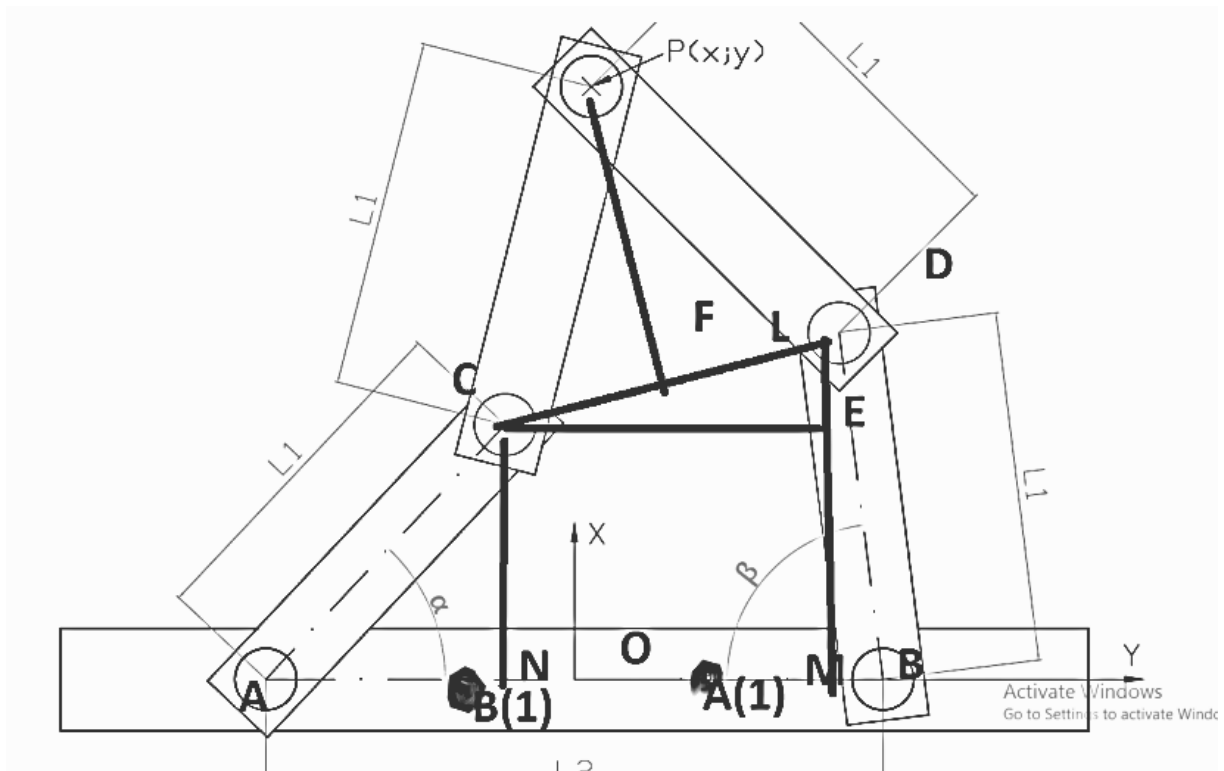


Fig. 2. Modelul geometric direct

$$AA(1) = l1 = BB(1) = AC = BD = CP = DP \quad (1)$$

$$AO = BO = \frac{l2}{2} \quad (2)$$

$$AN = l1 * \cos(\alpha); \quad BM = l1 * \cos(\beta) \quad (3)$$

$$CE = AB - AN - MB = l2 - l1 * (\cos(\alpha) + \cos(\beta)) = t1$$

(4)

$$DE = DM - CN = (\sin(\beta) - \sin(\alpha)) * l1 = t2 \quad (5)$$

$$CD^2 = t1^2 + t2^2 = t3^2 \quad (6)$$

$$PF^2 = l1^2 - \frac{t3^2}{4} = t4^2 \quad (7)$$

Fie L astfel incat $FL \parallel Ox$ si $FL = FP = t4$

Acum vom calcula coordonatele lui P prin numere complexe.

$$k1 = \cos(\alpha) + \sin(\alpha) * i \quad (8)$$

$$k2 = \cos(2\pi - \beta) + \sin(2\pi - \beta) * i \quad (9)$$

$$z_A = -\frac{l_2}{2} \quad z_B = \frac{l_2}{2} \quad (10)$$

Folosind rotatia lui L fata de F cu $(r + \frac{\pi}{4})$ fiind P
(11)

$$z_P - z_F = (z_L - z_F)(\cos(r + \frac{\pi}{4}) + i * \sin(r + \frac{\pi}{4}))$$

(12)

$$z_L - z_F = t_4 \quad (13)$$

$$r = m(PFL) - \pi/4 = M(DCE) = \arctg(t_2/t_1)$$

(14)

$$z_P = z_P - z_F + z_F = t_4(\cos(r + \frac{\pi}{4}) + i * \sin(r + \frac{\pi}{4})) + \frac{z_C}{2} + \frac{z_D}{2}$$

(15)

$$z_C + z_D = (z_A + (z_{A1} - z_A) * k_1) + (z_B + (z_{B1} - z_B) * k_2)$$

(16)

$$z_P = t_4(\cos(r + \frac{\pi}{4}) + i * \sin(r + \frac{\pi}{4})) + \frac{(z_A + z_B + l_1(k_1 - k_2))}{2}$$

(17)

$$t_4 = \sqrt{l_1^2 - \frac{t_3^2}{4}} = \sqrt{l_1^2 - \frac{t_1^2 + t_2^2}{4}} \quad (18)$$

$$t_4 = \sqrt{l_1^2 - \frac{(l_2 - l_1 * (\cos(\alpha) + \cos(\beta)))^2 + l_1^2 * (\sin(\beta) - \sin(\alpha))^2}{4}}$$

(19)

$$z_P = t_4(\cos(\arctg(\frac{l_1 * (\sin(\beta) - \sin(\alpha))}{l_2 - l_1 * (\cos(\alpha) + \cos(\beta))}) + \frac{\pi}{4}) + i * \sin(\arctg(\frac{l_1 * (\sin(\beta) - \sin(\alpha))}{l_2 - l_1 * (\cos(\alpha) + \cos(\beta))}) + \frac{\pi}{4})) + \frac{l_1(k_1 - k_2)}{2}$$

(20)

$$\text{Re}(z_P) = x$$

$$= \sqrt{l_1^2 - \frac{(l_2 - l_1 * (\cos(\beta) + \cos(\alpha)))^2 + l_1^2 * (\sin(\beta) - \sin(\alpha))^2}{4}} * \cos(\arctg(\frac{l_1 * (\sin(\beta) - \sin(\alpha))}{l_2 - l_1 * (\cos(\alpha) + \cos(\beta))}) + \frac{\pi}{4}) + l_1 * \frac{\cos(\alpha) - \cos(2\pi - \beta)}{2}$$

(21)

$$\text{Im}(z_P) = y$$

$$= \sqrt{l_1^2 - \frac{(l_2 - l_1 * (\cos(\beta) + \cos(\alpha)))^2 + l_1^2 * (\sin(\beta) - \sin(\alpha))^2}{4}} * \sin(\arctg(\frac{l_1 * (\sin(\beta) - \sin(\alpha))}{l_2 - l_1 * (\cos(\alpha) + \cos(\beta))}) + \frac{\pi}{4}) + l_1 * \frac{\sin(\alpha) - \sin(2\pi - \beta)}{2}$$

(7)

5 MODELUL GEOMETRIC INVERS

Cum ne sunt date coordonatele punctului P si stim si coordonatele punctelor A si B vor exista mereu doua puncte C si D si respectiv F si G care vor determina unghiurile α si β , exceptand cazul in care cele doua cercuri cu raza in A si P si latura l_1 sunt tangente si respectiv daca cele doua cercuri cu centru E si P si latura l_1 sunt tangente.

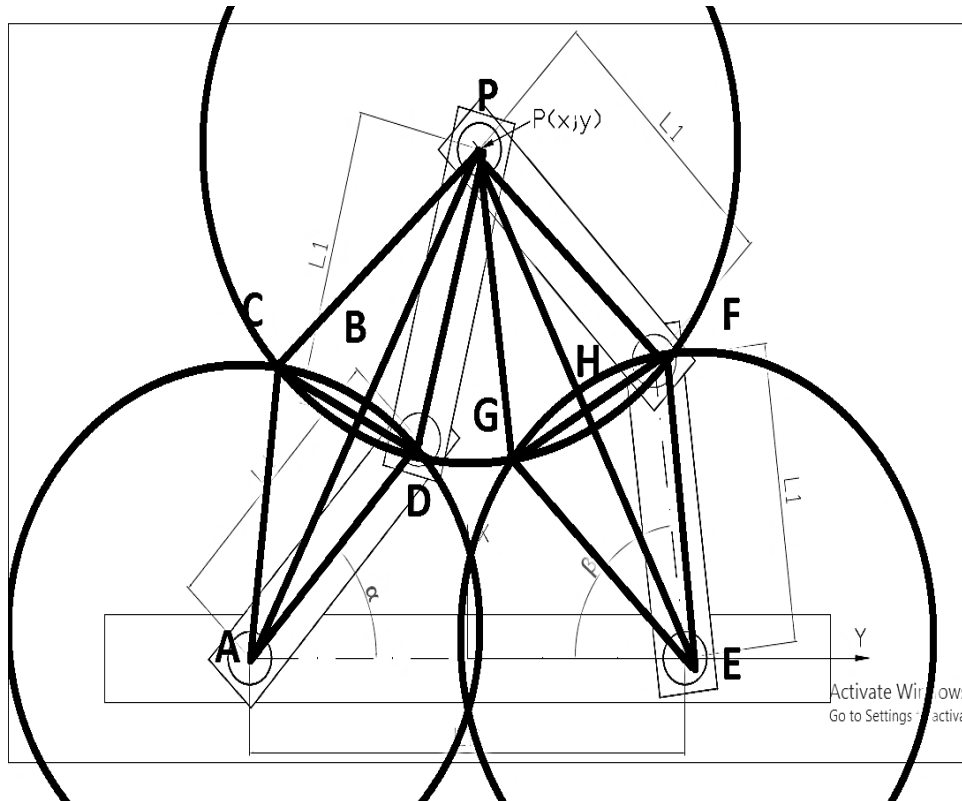


Fig. 2. Modelul geometric invers

Luam mijloacele celor doua laturi AP si EP in B si respectiv H.

Ducem mediatoarele acestora si vom lua C, D, G si F unde ACPD si EGPF sunt romburi.

Pentru a calcula unghiul α vom lua prima oara originea sistemului in punctul A iar coordonatele punctului P vor fi modificate $(x+l2/2; y)$.

ADPC romb, B interectia diagonalelor

$$AP = \sqrt{x^2 + y^2 + x * l2 + \frac{l2^2}{4}} \quad (22)$$

$$m(\angle DAP) = r = m(\angle CAP) = \arccos\left(\frac{AP}{2 * l1}\right) \quad (23)$$

$$q = m(\angle OAB) = \arctg\left(\frac{y}{x + \frac{l2}{2}}\right) \quad (24)$$

$$\alpha = q \pm r \quad (25)$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{y}{x + \frac{l2}{2}}\right) \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + x * l2 + \frac{l2^2}{4}}}{2 * l1}\right) \quad (26)$$

Pentru a calcula maura unghiului β vom folosi aceeasi metoda de calcul ca la aflarea unghiului α , dar fixam originea in punctul E iar coordonatele punctului vor fi modificate $(x-l2/2; y)$

$$EP = \sqrt{x^2 + y^2 - x * l2 + \frac{l2^2}{4}} \quad (27)$$

$$m(\angle GEP) = m = m(\angle FEP) = \arccos\left(\frac{EP}{2 * l1}\right) \quad (28)$$

$$n = m(\angle OEP) = \arctg\left(\frac{y}{x - \frac{l2}{2}}\right) \quad (29)$$

$$\beta = n \pm m \quad (30)$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{y}{x - \frac{l2}{2}}\right) \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 - x * l2 + \frac{l2^2}{4}}}{2 * l1}\right) \quad (31)$$

6 CONCLUZII:

Rezolvarea corecta a modelului geometric invers presupune utilizarea elementelor de geometrie analitica, pe cand rezolvarea modelului geometric direct foloseste notiuni de trigonometrie, geometric clasica si numere complexe. O rezolvare completa a modelului geometric invers ar presupune obtinerea unui set de ecuatii care, pentru o anume pozitie a punctului P sa genereze mai multe solutii (mai multe seturi de valori

posibile pentru α si β). In acest sens, obiectivele viitoare ale lucrarii constau in dezvoltarea modelului geometric invers pana la aducerea sa la o forma ce poate fi implementata in automatul programabil al robotului.

7 MULTUMIRI:

Vreau sa ii multumesc colegei mele de la Colegiul National de Informatica „Tudor Vianu”, Miruna Mitu, pentru suportul acordat in vederea rezolvarii modelului geometric invers. De asemenea, as dori sa ii multumesc si domnului sef de lucrari Andrei Mario Ivan care mi-a oferit sansa de a prezenta acest proiect la sesiunea de comunicari stiintifice din cadrul facultatii de Ingineria si Managementul Sistemelor Tehnologice, specializarea Robotica, o oportunitate foarte mare pentru mine.

8 BIBLIOGRAFIE:

- [1] Craig, J.J., *Introduction to Robotics: Mechanics and Control (Third Edition)*, Pearson Education, USA, 2005.
- [2] Nicolescu, A. F., *Roboti Industriali*, Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti, 2005.
- [3] Siciliano, B., Khatib, O., *Handbook of Robotics*, Springer, ISBN: 978-3-540-23957-4, Stanford, 2008.
- [4] Ivan, A., *Cercetari privind optimizarea robotilor industriali pentru prelucrari prin aschiere*, teza de doctorat, Universitatea Politehnica din Bucuresti, 2011
- [5] Dorin, A., Dobrescu, T., *Bazele cinematicii robotilor industriali*, Editura BREN, ISBN 973-9427-02-2, Bucuresti, Romania, 1998
- [6] Campa, R., Camarillo, K., Arias, L., *Kinematic Modeling and Control of Robot Manipulators via Unit Quaternions: Application to a Spherical Wrist*, 45th IEEE Conference on Decision and Control, pag. 6474 - 6479, San Diego, CA, USA, ISBN 1-4244-0171-2, March 2006
- [7] Nof, S. Y., *Handbook of industrial robotics*, John Wiley & Sons, Inc., ISBN 0-471-17783-0, SUA, 1999