

ANALIZA STATICĂ ȘI DE STABILITATE AXIAL SIMETRICĂ A UNEI STRUCTURI CILINDRICE

HOTHAZIE Ștefan¹

Conducător științific: Conf. dr. ing. Viorel ANGHEL

REZUMAT: Structurile de tip isogrid sunt configurații de rigidizori, de diferite secțiuni, ce alcătuiesc o structură regulată plasată pe plăci subțiri, cu scopul de a mări factorul de flambaj al acestora. Datorită impactului major al isogrid-ului asupra stabilității structurilor ranforsate și, de asemenea, al avansării tehnologiei de manufacturare, folosirea acestui tip de ranforsare în industria aerospațială a crescut în ultimii ani. Pentru dimensionarea preliminară a geometriei isogrid-ului trebuie rulate un număr destul de mare de simulări numerice. În cazul structurilor foarte mari, timpul de execuție al simulărilor numerice este mult prea mare. Așadar, această publicație are ca scop rezolvarea acestei probleme. Se propune a se găsi o soluție analitică a problemei de analiză statică și de stabilitate al unui cilindru ranforsat cu structura de tip isogrid. Aceasta este obținută considerând placa subțire împreună cu structura isogrid ca o singură placă subțire cu proprietăți modificate. Aceasta este apoi implementată într-un program de calcul simbolic 'Maxima', care va calcula numeric tensiunile la nivelul structurii cât și factorul de flambaj al acesteia.

CUVINTE CHEIE: isogrid, simulare, rigidizor, flambaj, static

1 INTRODUCERE

În această lucrare va fi prezentată o soluție analitică a problemei de analiză statică cât și de flambaj al unui cilindru placat cu rigidizori de tip isogrid, însoțită de o implementare într-un program de calcul simbolic 'Maxima'.

Soluția analitică presupune o modificare a ecuațiilor clasice de calcul static și de flambaj al unui cilindru supus la forțe axiale simetrice. În principal, se propune o metodă de calcul generalizată a proprietăților echivalente ale unei structuri de tip placă subțire ceva aproxima structura complicată a plăcii placate cu izogrid a cilindrului.

Aceasta va fi însoțită de o implementare simplă în programul 'Maxima' care va face calculul numeric și va afișa variația parametrilor caracteristici ai structurii sub forma unor grafice, ca de exemplu: variația factorului de flambaj versus grosimea plăcii subțiri, variația factorului de flambaj versus înălțimea rigidizorilor, etc.

2 STADIUL ACTUAL

Placarea structurilor de tip înveliș subțire cu rigidizor de tip isogrid este utilizată în industria aerospațială în principal pentru mărirea factorului de flambaj. Această metodă are avantajul de a ușura structura și de a îmbunătăți stabilitatea acesteia când este supusă la forțe axiale simetrice. Prin utilizarea rigidizorilor de tip izogrid învelișul subțire va avea o grosime redusă deoarece o parte

din forțele și momentele de încovoiere ce apar în structura cilindrică sunt preluate de rigidizori, aceștia având o rezistență la încovoiere mai mare decât placa subțire simplă. Acest fapt este datorat geometriei înalte a rigidizorilor, întrucât, la solicitarea de încovoiere, tensiunile variază liniar doar pe direcția radială. Așadar, rigidizorii au masa distribuită predominant în direcția radială a cilindrului. Datorită acestui tip de design, se pot atinge factori de flambaj mai mari utilizând mai puțin material.

Structura, astfel beneficiind de o masă redusă, a fost adoptată de industria aerospațială în construcția avioanelor de mare viteză, a rachetelor și chiar și a structurilor de rezistență folosite în construcția sateliților.

Dea lungul anilor au fost publicate numeroase metode analitice sau semianalitice care să descrie o astfel de structură isogrid. De menționat este metoda analitică folosită de către NASA în manualul 'NASA Isogrid Design Handbook', în care se folosește o aproximare a structurii placă subțire rigidizată ca o placă subțire cu proprietăți modificate. Ce diferă în abordarea NASA față de abordarea acestui articol este faptul că manualul folosește o axă neutră modificată și faptul că modifică modulul lui Young și grosimea plăcii subțiri echivalente. Metoda folosită în acest articol nu necesită folosirea unei axe neutre modificate, iar proprietățile plăcii subțiri modificate sunt approximate complet diferit. Alte metode analitice au fost publicate, însă datorită numărului mare de

publicații, se vor rezuma câteva caracteristici. Acestea folosesc metode de aproximare a factorului de flambaj folosind funcții de bază trigonometrice sau alte metode asemănătoare. În acest articol s-a folosit o metodă neobișnuită ce va fi descrisă în capitolele următoare. Ce a împrumutat acest articol din literatură este împărțirea cilindrului în module identice cu care se reconstruiește întreaga structură și ipotezele pe care se bazează metoda analitică.

3 SOLUȚIA ANALITICĂ

3.1 DESCRIEREA PROBLEMEI

Problema folosește metoda descrisă în lucrarea 'BUCKLING ANALYSIS OF GRID STIFFENED COMPOSITE STRUCTURES' de către Samuel Kidane[2], și anume, descompunerea structurii în module elementare. Aceste module elementare sunt o reducere a designului rigidizorilor atașați cilindrului. Folosind această tehnică se simplifică masiv calculele. Aceste module vor fi apoi folosite la reconstrucția cilindrului original astfel: se alege un număr întreg de module și se construiește circumferința la baza cilindrului, apoi se copiază acest rând pe direcția axei de simetrie până când se atinge lungimea dorită a cilindrului. În figura 1, s-a ilustrat un modul exemplu cu înălțimea 'a' și lățimea 'b', având rigidizori pe laturi și pe cele două diagonale ale acestuia.



Fig 2. Model FEM pentru modul

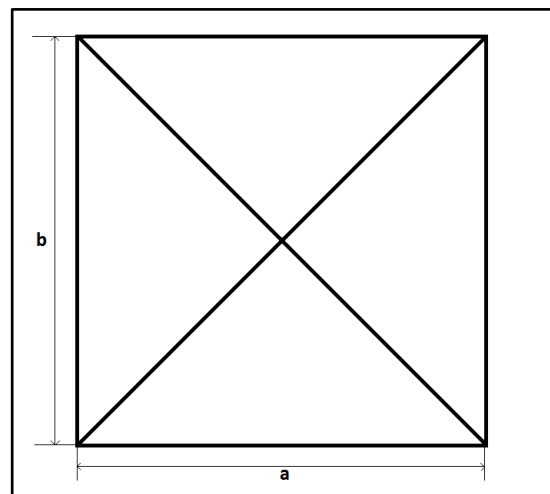


Fig. 1. Modul cu doi rigidizori

Problema constă în calculul tensiunilor structurii cât și factorul de flambaj. Pentru acest lucru vom avea nevoie de matricea de rigiditate a modulului și, implicit, a întregii structuri.

3.2 CALCULUL MATRICII DE RIGIDITATE

Pentru calculul matricii de rigiditate vom începe prin a defini expresiile elongațiilor și a forțelor distribuite pe placa curbă subțire. Toate acestea sunt o reiterație modificată a formulelor de calcul ale teoriei de flambaj ai cilindrilor de lungime medie din cartea 'Buckling of Bars, Plates and Shells' de Robert Millard Jones[1].

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_x &= u_x + \frac{1}{2}w_x^2 \\ \bar{\epsilon}_y &= v_y + \frac{w}{r} + \frac{1}{2}w_y^2 \\ \bar{\gamma}_{xy} &= v_x + u_y + w_x w_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_x &= -w_{xx} \\ k_y &= -w_{yy} \\ k_{xy} &= -2w_{xy}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \bar{\epsilon}_x + zk_x \\ \epsilon_y &= \bar{\epsilon}_y + zk_y \\ \gamma_{xy} &= \bar{\gamma}_{xy} + zk_{xy}\end{aligned}$$

Elongațiile notate cu bară deasupra sunt elongațiile plăcii plane. Acestea au fost scrise sub formă neliniară deoarece sunt necesare în calculele ce vor urma. Elongațiile liniare sunt insuficiente pentru calculul flambajului axial simetric. Următoarele trei expresii sunt cele pentru curbura plăcii, acestea reprezentând deviația deformației de la placa plană. Ultimele trei expresii sunt forma finală a elongațiilor totale. Deoarece studiem plăci curbate subțiri, aceste elongații totale variază liniar pe grosimea plăcii. Axa z reprezintă axa pe direcția radială, axa y pe direcția

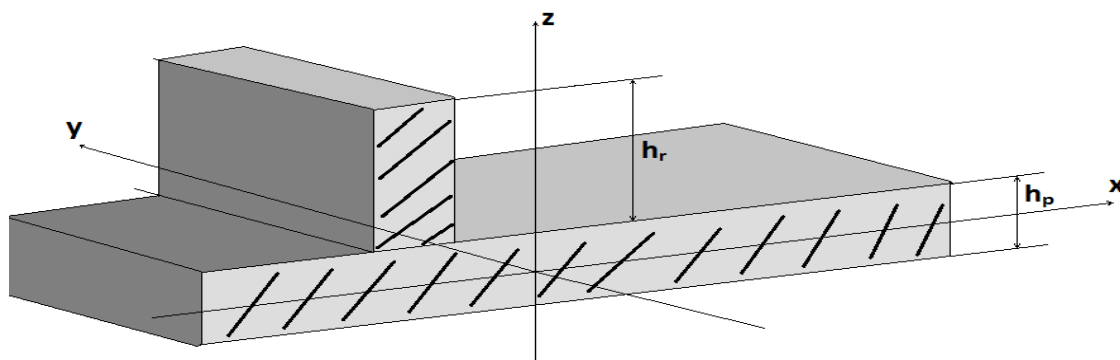


Fig. 3. Placă și rigidizor

circumferențială iar axa x pe direcția axială a cilindrului.

Din moment ce ne interesează numai deformații axial simetrice, toate derivatele în funcție de y vor fi nule iar deformația circumferențială v va fi zero. Astfel, expresiile de mai sus vor deveni:

$$\bar{\epsilon}_x = u_x + \frac{1}{2}w_x^2$$

$$\bar{\epsilon}_y = \frac{w}{r}$$

$$\bar{\gamma}_{xy} = 0$$

$$k_x = -w_{xx}$$

$$k_y = 0$$

$$k_{xy} = 0$$

$$\epsilon_x = u_x + \frac{1}{2}w_x^2 - zw_{xx}$$

$$\epsilon_y = \frac{w}{r}$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

Vom defini acum forțele și momentele distribuite:

$$N_x = \int_h \sigma_x dz = A_{11}\bar{\epsilon}_x + A_{12}\bar{\epsilon}_y$$

$$N_y = \int_h \sigma_y dz = A_{21}\bar{\epsilon}_x + A_{22}\bar{\epsilon}_y$$

$$N_{xy} = \int_h \tau_{xy} dz = A_{33}\bar{\gamma}_{xy}$$

$$M_x = \int_h \sigma_x z dz = A_{44}k_x$$

$$M_y = \int_h \sigma_y z dz = 0$$

$$M_{xy} = \int_h \tau_{xy} z dz = 0$$

După cum se poate vedea, expresiile forțelor și momentelor distribuite vor fi funcții liniare de elongații și curburi care pot fi scrise sub formă matriceală:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix}$$

Matricea A_{ij} este matricea de rigiditate a modului. Majoritatea valorilor matricii A_{ij} au fost neglijate deoarece valorile respective reprezintă tocmai efectele de cuplaj ai rigidizorilor, care sunt neesențiale. Rolul rigidizorilor în metoda analitică prezentată în articol este de a modifica proprietățile plăcii curbe a cilindrului. Se neglijează orice alt efect al rigidizorilor.

Calculul propriu-zis al integralelor forțelor și momentelor distribuite se va împărți în doi pași: unul dedicat calculului matricii de rigiditate a plăcii curbe și unul dedicat calculului matricii de rigiditate al rigidizorilor.

$$N_x = \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2}+h_r} \sigma_x dz + \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2}} \sigma_x dz$$

$$N_y = \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2}+h_r} \sigma_y dz + \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2}} \sigma_y dz$$

$$N_{xy} = \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2}+h_r} \tau_{xy} dz + \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2}} \tau_{xy} dz$$

$$M_x = \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2}+h_r} \sigma_x z dz + \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2}} \sigma_x z dz$$

$$M_y = \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2}+h_r} \sigma_y z dz + \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2}} \sigma_y z dz$$

$$M_{xy} = \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2}+h_r} \tau_{xy} z dz + \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2}} \tau_{xy} z dz$$

În figura 3 s-au ilustrat înălțimile plăcii și rigidizorilor, h_p respectiv h_r . Expresiile tensiunilor rămân cele obișnuite:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

În figura 4 s-a ilustrat o placă cu un rigidizor rotit împreună cu sistemul de coordonate al plăcii, XOY.

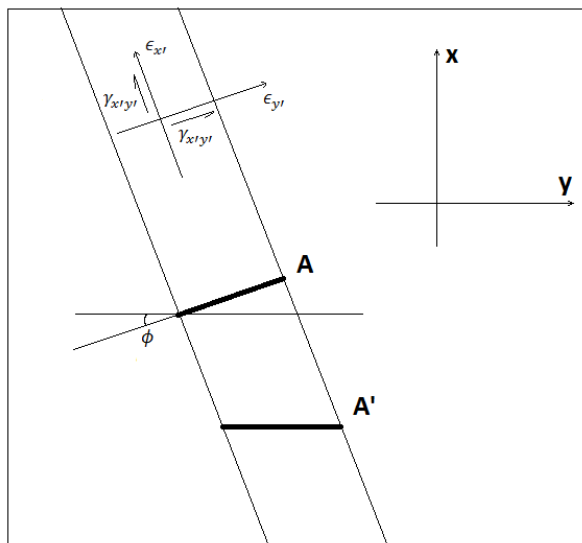


Fig. 4. Placă și rigidizor rotit

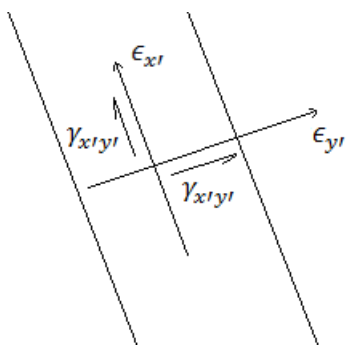


Fig. 5. Elongații rotite

Efectul rigidizorilor este doar de a da rezistență la încovoiere plăcii pe care o ranforcează. Pentru a afla expresiile tensiunilor în sistemul de coordonate global, elongațiile în lungul rigidizorului, ilustrate în figura 4, trebuie rotite cu unghiul ϕ . Vom scrie această relație între elongațiile din sistemul de coordonate al modulului și elongațiile din sistemul de coordonate local al rigidizorului ca o relație matriceală, unde $c = \cos(\phi)$ iar $s = \sin(\phi)$:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{pmatrix}$$

Deformația rigidizorului are loc doar în lungul acestuia, așadar, singura elongație nenulă este $\epsilon_{x'}$:

$$\epsilon_{x'} = c^2 \epsilon_x + s^2 \epsilon_y - sc \gamma_{xy}$$

Idem, avem pentru tensiuni în sistemul de coordonate al modulului:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 \sigma_{x'} \\ s^2 \sigma_{x'} \\ -2sc \sigma_{x'} \end{pmatrix}$$

Cum singura tensiune nenulă în lungul rigidizorului are următoarea expresie, $\sigma_{x'} = E \epsilon_{x'} = E(c^2 \epsilon_x + s^2 \epsilon_y - sc \gamma_{xy})$, avem:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} c^2(c^2 \epsilon_x + s^2 \epsilon_y - sc \gamma_{xy}) \\ s^2(c^2 \epsilon_x + s^2 \epsilon_y - sc \gamma_{xy}) \\ -2sc(c^2 \epsilon_x + s^2 \epsilon_y - sc \gamma_{xy}) \end{pmatrix}$$

Pentru a afla contribuția rigidizorului la forța distribuită N_x , vom scrie echilibrul forțelor astfel:

$$N_x = \frac{F_x}{a} = \frac{1}{a} \int \sigma_x dA$$

$$N_x = \frac{1}{a} \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2} + h_r} \sigma_x \frac{t_r}{\cos(\phi)} dz$$

Forța F_x reprezintă forța totală pe aria rigidizorului. N_x este forța distribuită pe latura a a modulului. Elementul de arie dA este egal cu grosimea rigidizorului t_r împărțit la $\cos(\phi)$ înmulțit cu dz , grosimea unei fâșii mici de rigidizor. S-a împărțit la $\cos(\phi)$ deoarece se integrează pe proiecția ariei transversale a rigidizorului pe axa Ox .

În mod similar se obțin și relațiile pentru restul forțelor și momentelor distribuite:

$$N_x = \frac{E}{a \cos(\phi)} \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2} + h_r} t_r c^2 (c^2 \epsilon_x + s^2 \epsilon_y - sc \gamma_{xy}) dz$$

$$N_y = \frac{E}{b \sin(\phi)} \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2} + h_r} t_r s^2 (c^2 \epsilon_x + s^2 \epsilon_y - sc \gamma_{xy}) dz$$

$$N_{xy} = \frac{E}{a \cos(\phi)} \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2} + h_r} t_r (-2sc) (c^2 \epsilon_x + s^2 \epsilon_y - sc \gamma_{xy}) dz$$

$$M_x = \frac{E}{a \cos(\phi)} \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2} + h_r} t_r c^2 (c^2 \epsilon_x + s^2 \epsilon_y - sc \gamma_{xy}) z dz$$

$$M_y = \frac{E}{b \sin(\phi)} \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2} + h_r} t_r s^2 (c^2 \epsilon_x + s^2 \epsilon_y - sc \gamma_{xy}) z dz$$

$$M_{xy} = \frac{E}{a \cos(\phi)} \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2} + h_r} t_r (-2sc) (c^2 \epsilon_x + s^2 \epsilon_y - sc \gamma_{xy}) z dz$$

Similar procedăm și în cazul plăcii subțiri. Matricea de rigiditate totală se obține prin însumarea matricilor de rigiditate ai fiecărui rigidizor și cea a plăcii. Având aceste relații finale, putem extrage coeficienții matricii de rigiditate dintre forțe și momente distribuite și elongații și curburi.

Se vor enumera din nou pașii pentru obținerea coeficienților matricii de rigiditate totale:

1. Se calculează matricea de rigiditate pentru placa curbă.

2. Se alege un rigidizor și se scot expresiile forțelor și momentelor distribuite ale acestuia în funcție de elongații și curburi folosind expresiile de mai sus.
3. Se scot coeficienții elongațiilor și curburilor din expresiile rezultate din pasul anterior și se asamblează matricea de rigiditate a rigidizorului.
4. Se repetă pașii 2 și 3 pentru toți rigidizorii.
5. Se compune matricea de rigiditate a modulului prin adunarea tuturor matricilor de rigiditate calculate anterior.

3.3 CALCULUL TENSIUNILOR ÎN CAZUL SOLICITĂRII STATICE AXIAL SIMETRICE

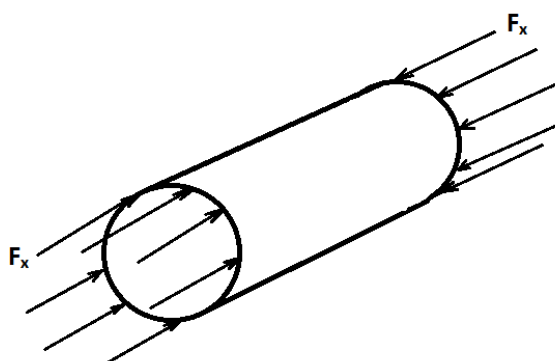


Fig. 6. Cilindru solicitat axial simetric

Calculul este acum unul simplu. Având matricea de rigiditate, putem scrie relația dintre forțe și momente distribuite și elongații și curburi:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix}$$

Necunoscutele sunt elongațiile și curburile, și anume vectorul din dreapta. Cunoscutele sunt F_x , forța axială, și R , raza cilindrului. Cum N_x este forța F_x împărțită la circumferința cilindrului, și cum restul forțelor și momentelor sunt nule, avem:

$$\begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ 2\pi R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Dacă separăm matricea de rigiditate totală în matricile de rigiditate a fiecărei componente, calculate în capitolul 3.2, vom putea obține tensiunile fiecărui element al modulului. Elongațiile, ce au fost calculate mai sus, sunt aceleași pentru orice componentă.

Astfel, tensiunile elementelor se pot afla doar prin simpla înmulțire a matricii de rigiditate ale acestora cu vectorul de elongații.

3.4 CALCULUL LA FLAMBAJ

Mai întâi vom scrie ecuațiile de echilibru sub forma generală:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x w_{xx} + N_y w_{yy} \\ &+ 2N_{xy} w_{xy} - \frac{N_y}{R} = p \end{aligned}$$

Presiunea p reprezintă presiunea distribuită pe circumferința cilindrului.

Făcând toate derivatele în funcție de y nule și componenta v zero, avem:

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11} \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) + A_{12} \frac{w}{R} \\ N_y &= A_{21} \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) + A_{22} \frac{w}{R} \\ N_{xy} &= 0 \\ M_x &= A_{44} (-w_{xx}) \\ M_y &= 0 \\ M_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

Iar sistemul de ecuații diferențiale devine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + N_x w_{xx} - \frac{N_y}{R} &= p \end{aligned}$$

Din prima relație rezultă ca $N_x = N$ constant. Dacă descompunem a doua relație avem:

$$A_{44} \frac{d^4 w}{dx^4} - N \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{N_y}{R} + p = 0$$

Vom scoate N_y numai în funcție de w/R din expresiile forțelor distribuite N_x și N_y , pentru a putea obține o ecuație diferențială de ordinul patru.

$$N_y = \frac{1}{A_{11}} \left(A_{21} N + (A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}) \frac{w}{R} \right)$$

Asadar, ecuația diferențială devine:

$$A_{44} \frac{d^4 w}{dx^4} - N \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}{A_{11}} \frac{w}{R^2} + \frac{A_{21}}{A_{11}} N + p = 0$$

Din cauza faptului că rezolvarea propriu-zisă a acestei ecuații diferențiale este mult prea voluminoasă

pentru acest articol, se va descrie numai pașii de rezolvare și se va da direct răspunsul.

Pentru rezolvare:

1. Se scrie polinomul caracteristic care are patru rădăcini.
2. Se alcătuieste soluția generalizată cu patru constante.
3. Se pun următoarele patru condiții la limită: la fiecare dintre capete $w = 0$ și $w_{xx} = 0$.
4. Se obține un sistem linear de ecuații în patru necunoscute.
5. Se egalează determinantul cu zero și vom obține o relație între cele patru constante. Acea relație conține variabila N și este de forma:

$$N = 2 \sqrt{\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}{A_{11}} \frac{A_{44}}{R^2}}$$

Se știe că N este forța distribuită pe circumferința cilindrului, și anume:

$$N = \frac{F_x}{2\pi R}$$

Printr-o simplă înlocuire ajungem la formula forței critice de flambaj pentru un cilindru de lungime medie solicitat axial:

$$P_{cr} = 4\pi \sqrt{\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}{A_{11}}} A_{44}$$

4. REZULTATE NUMERICE

S-a oferit o adresă web la sfârșitul acestui articol unde se află codul principal al programului în care s-a implementat metoda analitică prezentată în acest articol.

Pentru a obține o măsură a erorii pe care o poate avea metoda analitică, s-a ales un model de cilindru cu isogrid cu următoarele specificații:

- R=.5 m
- material: Aluminu
- E=70 GPa
- $\nu=0.33$
- F=100000 N

În figura 7 este ilustrat cilindrul cu isogrid, cu modul de raport înălțime/lățime egal cu 1, iar în figura 12 este ilustrat cilindrul cu isogrid, cu modul de raport înălțime/lățime egal cu 2.5.

Învelișul subțire, atât și rigidizorii, sunt făcuți din același material: aluminu. Raza cilindrului este de 0.5 metri. În tabelul de mai jos sunt figurate rezultatele ce s-au obținut mai întâi cu programul propus, iar apoi cu modelare cu element finit.

$\frac{b}{a}$	h_p [mm]	$\frac{P_{crA}}{F}$	$\frac{P_{crFEM}}{F}$	ϵ_{rel} [%]
1	8	196.12	175.13	11.98
1	4	63.56	51.03	24.55
1	2	28.8	21.38	34.7
1	1	17.36	7.423	133.86
1.5	8	190.79	172.8	10.41
1.5	4	59.41	49.76	19.38
1.5	2	25.64	19.44	31.85
1.5	1	15.01	5.14	191.68
2	8	188.41	169.67	11.04
2	4	57.52	46.23	24.42
2	2	24.18	14.85	62.80
2	1	13.91	4.31	222.73
2.5	8	187.27	169.67	10.37
2.5	4	56.61	46.23	22.45
2.5	2	23.46	14.85	57.95
2.5	1	13.38	4.31	210.44

În figurile următoare sunt ilustrate câteva rezultate ale calculelor cu element finit.

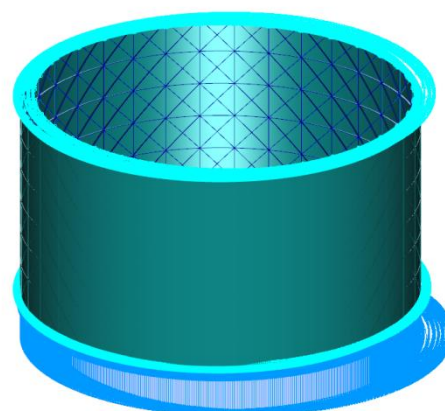


Fig. 7. Cilindru cu isogrid $b/a=1$

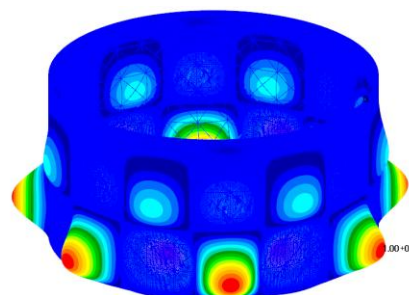


Fig. 8. $b/a=1$; $h_p=8$

Tabelul 1. Rezultate numerice

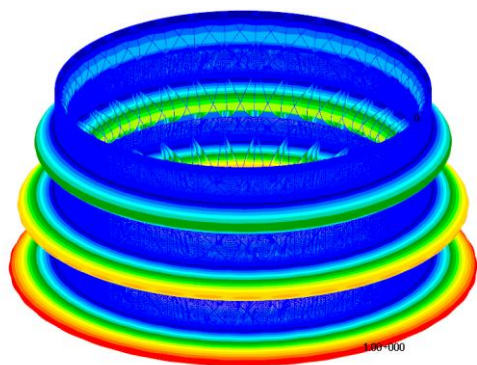


Fig. 9. $b/a=1$; $hp=4$

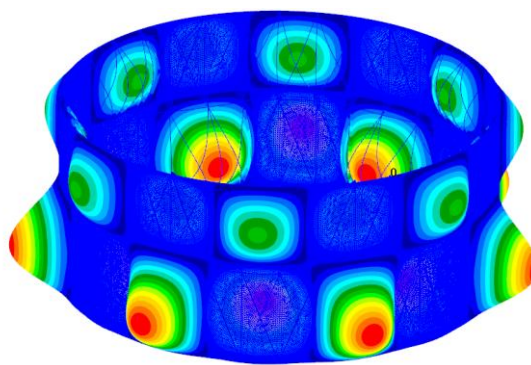


Fig. 13. $b/a=2.5$; $hp=8$

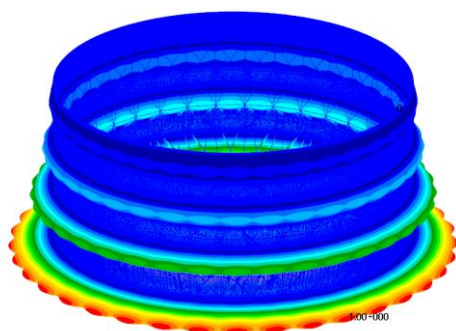


Fig. 10. $b/a=1$; $hp=2$

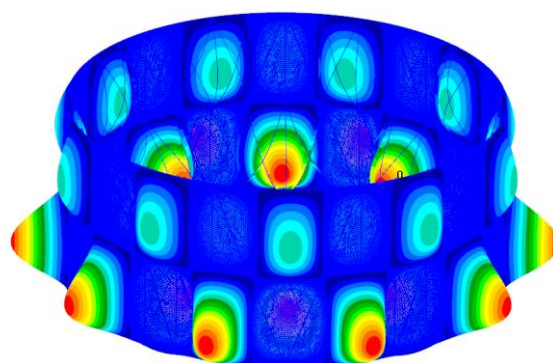


Fig. 14. $b/a=2.5$; $hp=4$

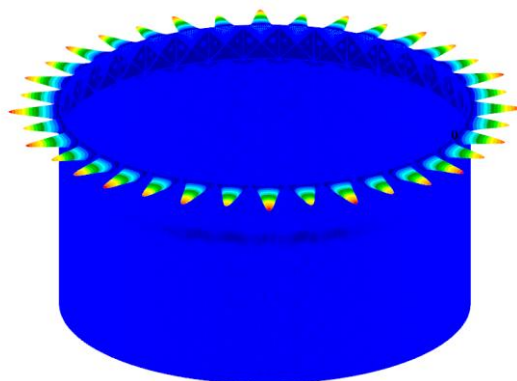


Fig. 11. $b/a=1$; $hp=1$

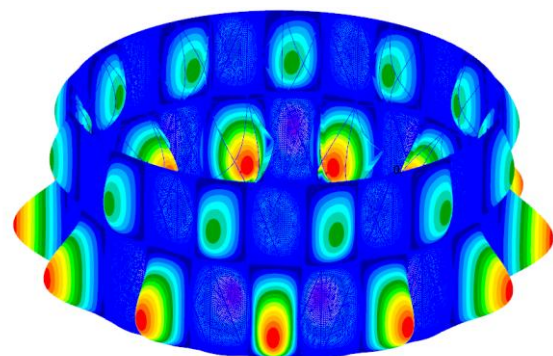


Fig. 15. $b/a=2.5$; $hp=2$

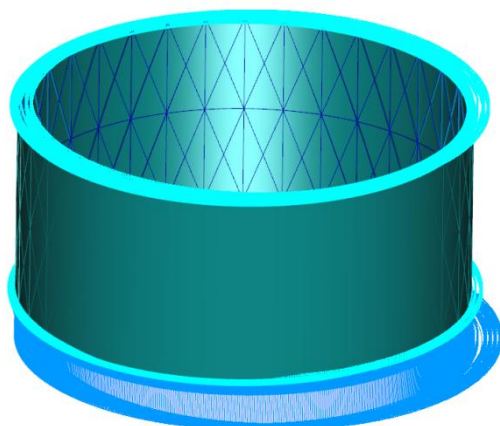


Fig. 12. Cilindru cu isogrid $b/a=2.5$

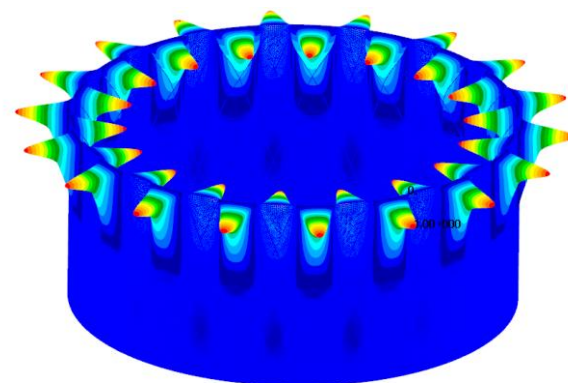


Fig. 16. $b/a=2.5$; $hp=1$

După cum se poate vedea pentru module unde rigidizorii au o pondere volumică mică,

predomină flambajul clasic unde placa flambează prima. Pentru module în care rigidizorii au pondere volumică mare, ca de exemplu în figurile 11 și 16, flambajul are loc mai întâi pentru rigidizori. Acest fapt explică de ce eroarea pare a fi extrem de mare în acele cazuri (>200%). Valoarea flambajului în acele cazuri este una locală, cea a rigidizorilor, și nu cea globală a întregii structuri.

5 CONCLUZII

După cum se poate vedea calculul analitic, prezentat în acest articol, al unei asemenea structuri de tip cilindru ranforsat cu isogrid, poate avea erori considerabile. De menționat este și faptul că în realitate valorile factorului de flambaj sunt cu mult mai mici chiar și decât rezultatele date de analiza cu element finit. Așadar, această metodă nu trebuie considerată ca fiind foarte precisă.

Această metodă a fost creată pentru a servi ca unealtă în fazele preliminare al unui studiu de fezabilitate. A fost concepută pentru a scurta timpul de calcul al acestor parametri, întrucât se pierde foarte mult timp pe un calcul ce nu redă fidel realitatea.

Un studiu important ar fi cel al dezvoltării unei metode de determinare a flambajului care ia în calcul și distribuția de imperfecțiuni în structură. Un calcul statistic ar fi posibil, însă cea mai promițătoare metodă ar fi cea care folosește calculul variațional în a determina viteza cu care geometria cilindrului se alterează și a lucra direct cu aceste date pentru a capta toate tipurile de imperfecțiuni ce ar putea fi prezente în structura după construire.

6 MULȚUMIRI

Menționez pe Camelia Munteanu, Radu Bibire și Mihaela Nastase pentru contribuții la realizarea analizelor cu element finit folosite în această lucrare.

7 BIBLIOGRAFIE

- [1]. Robert Millard Jones, (2006), *Buckling of Bars, Plates, and Shells*, Bull Ridge Corporation, Blacksburg, Virginia, 0978722302, 9780978722302
- [2]. Samuel Kidane, (2002), "Buckling Analysis of Grid Stiffened Composite Structures", Addis Ababa University