

DETERMINAREA NUMERICĂ A FACTORULUI DE INTENSITATE A TENSIUNII LA VÂRFUL UNEI FISURI DIN APROPIEREA UNEI GĂURI

NEGRESCU Mario-Alin¹, SAVU Mihai-Costin¹

Conducător științific: Prof. Dr. Ing. Ștefan Dan PASTRAMĂ

REZUMAT: În lucrare se prezintă un calcul numeric utilizând metoda elementelor finite pentru calibrarea factorului de intensitate a tensiunii la vârful unei fisuri situate în apropierea unei găuri circulare. Structura considerată este o placă metalică sollicitată cu o tensiune uniformă. În urma calculului numeric se propune o expresie polinomială a factorului de intensitate a tensiunii, ce poate fi utilizată pentru evaluarea duratei de viață a structurii în cazul solicitărilor variabile.

CUVINTE CHEIE: fisură, factorul de intensitate a tensiunii, elemente finite, interpolare polinomială

1 INTRODUCERE

Majoritatea structurilor conțin fisuri ce apar fie în procesul de fabricație fie în timpul funcționării. În anumite condiții, aceste fisuri se pot propaga, conducând la cedarea piesei. Modul în care o fisură se propagă depinde de starea de tensiune ce apare în regiunea în care aceasta se află. După mișcarea relativă pe care o au suprafețele de rupere situate de o parte și de alta a planului în care se extinde fisura, propagarea acesteia se poate face în următoarele trei moduri simple (Pană & Pastramă, 2001):

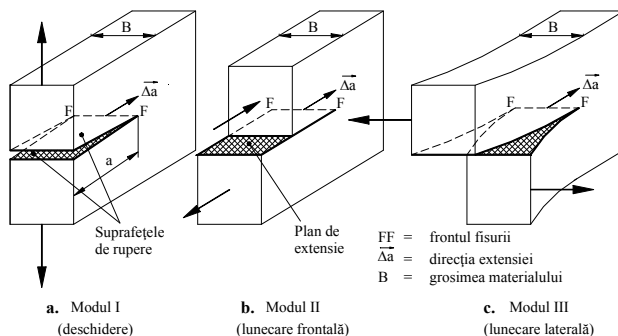


Fig. 1. Modurile de propagare a fisurii (Pană & Pastramă, 2001)

Modul I: fisura se extinde prin deschidere; deplasările punctelor de pe suprafețele de rupere sunt perpendiculare pe planul de extensie al fisurii (figura 1,a);

Modul II: fisura se extinde prin lunecare frontală; deplasările punctelor de pe suprafețele de rupere se fac în planul fisurii, perpendicular pe

frontul acesteia, în sensul de avansare a fisurii (figura 1,b);

Modul III: fisura se extinde prin lunecare laterală; deplasările punctelor de pe suprafețele de rupere se fac în planul fisurii, paralel cu frontul ei (figura 1,c).

Toate celelalte moduri posibile pot fi descrise prin combinarea acestor trei moduri simple.

Cele mai multe ruperi fragile se produc după modul I, la care energia elastică de deformație disponibilă și deplasările frontului fisurii sunt mai mari decât la celelalte moduri.

Pentru a evalua posibilitatea de propagare fragilă a unei fisuri, este necesară determinarea *factorului de intensitate a tensiunii*, care este parametrul cel mai important în mecanica ruperii liniar elastică. Factorul de intensitate a tensiunii caracterizează starea de tensiune din jurul vârfului unei fisuri și este utilizat ca și criteriu de cedare în cazul în care zona cu deformații plastice datorate concentrării de tensiune din jurul fisurii are dimensiuni neglijabile. Acest parametru, notat cu K urmat de un indice ce precizează modul de extindere a fisurii (I, II sau III), este utilizat de asemenea în calculul duratei de viață a pieselor cu fisuri sollicitate de încărcări variabile în timp. Factorul de intensitate depinde de geometria piesei, dimensiunile și poziția fisurii, mărimea și distribuția încărcărilor, și poate fi calculat cu relația generală:

$$K = F\sigma\sqrt{\pi a} \quad (1)$$

în care F este un factor ce depinde de geometria piesei, σ este tensiunea îndepărtată aplicată, iar a

¹ Specializarea Mechanical Engineering, Facultatea de Inginerie în Limbi Străine;

E-mail: marionegrescu@yahoo.com;

Determinarea numerică a factorului de intensitate a tensiunii la vârful unei fisuri din apropierea unei găuri

reprezintă lungimea sau semilungimea fisurii. Analizând relația (1), se poate observa că factorul de intensitate a tensiunii este direct proporțional cu încărcarea aplicată și cu rădăcina pătrată a lungimii fisurii.

Propagarea fragilă a unei fisuri este posibilă în cazul în care factorul de intensitate este cel puțin egal cu valoarea critică K_c (factorul critic de intensitate a tensiunii). Dacă sunt îndeplinite condițiile stării plane de deformare, atunci K_c este o constantă de material, se notează K_{Ic} și se numește *tenacitatea la rupere*.

În cazul unor structuri simple, expresii ale factorului de intensitate a tensiunii pot fi găsite în compendii sub forma unor grafice sau expresii matematice funcție de lungimea fisurii și geometria piesei (Rooke & Cartwright, 1976), (Murakami, 1987), (Wu & Carlsson, 1991). În cazul unor structuri complicate, pentru care nu sunt disponibile soluții, determinarea acestui parametru se poate face utilizând metode analitice, numerice sau experimentale. În literatura de specialitate există un număr foarte mare de studii în care se propun astfel de metode pentru evaluarea factorului de intensitate a tensiunii. O sinteză a acestora este prezentată în (Cartwright & Rooke, 1975). Odată cu dezvoltarea foarte rapidă a computerelor, metodele numerice au început să fie din ce în ce mai folosite în calculele de mecanica ruperii. Dintre acestea, cea mai utilizată în prezent este metoda elementelor finite (MEF) pentru care s-au creat programe performante, ce pot modela structuri complexe.

În lucrare se prezintă un calcul cu elemente finite pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii la vârful unei fisuri situate în apropierea unei găuri circulare, într-o placă solicitată cu o tensiune uniformă ce produce deschiderea fisurii după Modul I. Analizele cu elemente finite au fost făcute pentru mai multe lungimi ale fisurii, iar rezultatele obținute au fost interpolate obținându-se o expresie generală a factorului de intensitate a tensiunii pentru această structură. Relația obținută poate fi utilizată pentru determinarea factorului de intensitate pentru orice lungime a fisurii aflată în intervalul considerat.

2 STRUCTURA STUDIATĂ

Calculul numeric a fost realizat pentru o placă de lățime finită, având un concentrator de tensiune de tip gaură circulară și o fisură aflată în apropierea găurii. Geometria structurii este prezentată în figura 2, iar dimensiunile acesteia sunt listate în Tabelul 1. Placa este solicitată de o

tensiune îndepărtată uniformă $\sigma = 100\text{MPa}$, iar materialul acesteia are constantele: $E = 21 \cdot 10^4\text{MPa}$ și $\nu = 0.3$.

Tabelul 1. Geometria structurii

ρ [mm]	H [mm]	b [mm]	W [mm]
13.2	396	66	198

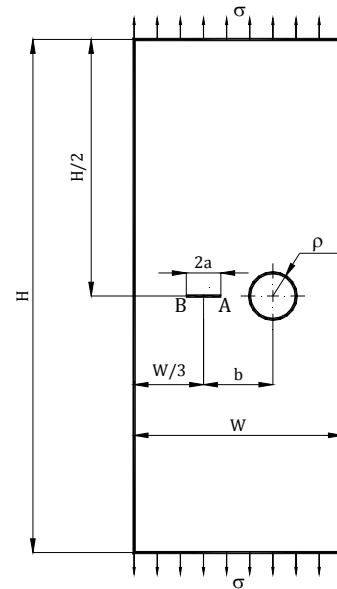


Fig. 2. Structura studiată

3 ANALIZA CU ELEMENTE FINITE

Calculul numeric a fost efectuat prin metoda elementelor finite, utilizând programul FRANC2D (<http://cfg.cornell.edu/software>). Acesta este un software specializat pentru mecanica ruperii, ce poate simula propagarea unei fisuri într-o structură. Programul poate modela structuri stratificate și are o opțiune pentru calculul la încovoire al îmbinărilor suprapuse (lap joints) excentrice. FRANC2D poate modela de asemenea structuri bidimensionale utilizând elemente triunghiulare sau patrulatere cu patru sau opt noduri.

În zona din jurul vârfului unei fisuri solicitate în Modul I, într-un sistem de axe având originea la vârful fisurii, tensiunile sunt date de relațiile (Irwin, 1957):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\end{aligned}\quad (2)$$

în care r și θ sunt coordonatele polare ale unui punct iar K_I este factorul de intensitate a tensiunii. Se poate observa că, la vârful fisurii (pentru $r \rightarrow 0$) tensiunile devin infinite (câmpul de tensiuni este singular). Pentru simularea singularității la vârful fisurilor, programul FRANC2D utilizează elemente speciale triunghiulare în care nodurile de mijloc de lângă vârful fisurii sunt mutate la sfertul laturii. Modul în care este simulată singularitatea de la vârful fisurii cu ajutorul acestor elemente a fost descris de către Barsoum [8].

Discretizarea inițială a plăcii a fost realizată utilizând elemente patrulatere cu opt noduri (figura 3). Placa s-a considerat cu o grosime suficient de mare pentru a asigura existența stării plane de deformație.

După realizarea discretizării, au fost introduse caracteristicile materialului și apoi condițiile la limită. Latura inferioară a plăcii a fost blocată pe ambele direcții (figura 4), iar pe latura superioară s-a aplicat tensiunea uniformă $\sigma = 100$ MPa.

Programul permite introducerea ulterioară a unei fisuri centrale sau de margine prin indicarea coordonatelor vârfurilor (vârfului). Pentru studiu au fost considerate șapte lungimi diferite ale fisurii, corespunzătoare rapoartelor $a/b = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7$.

Pentru fiecare fisură creată, discretizarea este refăcută automat în zona acesteia, introducându-se elemente singulare triunghiulare la vârfuri.

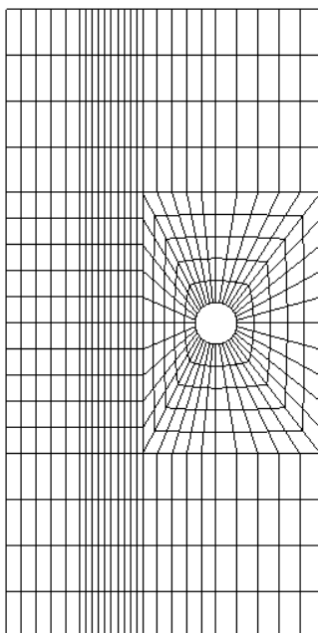


Fig. 3. Discretizarea inițială fără fisură

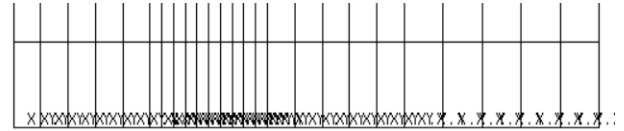


Fig. 4. Blocajele aplicate pe latura inferioară

Un exemplu de re-discretizare în zona fisurii este prezentat în figura 5, în care se poate observa deformata structurii, cu fisura deschisă după Modul I pentru raportul $a/b = 0,4$ (corespunzătoare unei lungimi a fisurii $2a = 52,8$ mm). Structura nedeformată este desenată cu linii portocalii.

În urma re-discretizării după introducerea fisurii, au rezultat între 1931 și 2609 noduri și respectiv între 638 și 990 elemente.

4 REZULTATE ȘI DISCUȚII

Valorile factorului de intensitate a tensiunii K_I la vârful A, obținute în urma analizelor cu elemente finite precum și valorile factorului adimensional F din relația (1) sunt prezentate în Tabelul 2.

Factorul adimensional de intensitate a tensiunii F a fost reprezentat grafic în funcție de raportul a/b în figura 6.

Tabelul 2. Rezultatele obținute

a/b	K_I [MPa√mm]	$F = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$
0,1	475,51	1,044
0,2	685,43	1,064
0,3	864,92	1,097
0,4	1041,98	1,144
0,5	1238,76	1,217
0,6	1496,83	1,342
0,7	1974,98	1,639

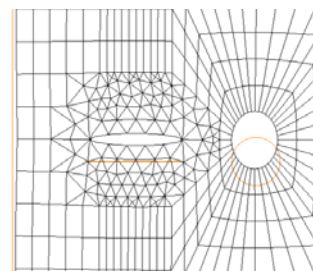


Fig. 5. Structura deformată în cazul $a/b = 0,4$

Determinarea numerică a factorului de intensitate a tensiunii la vârful unei fisuri din apropierea unei găuri

Rezultatele obținute au fost interpolate pentru a se obține o relație generală de calcul pentru factorul adimensional F . S-a obținut următoarea corelație polinomială de gradul 5, cu coeficientul de determinare $R = 0.999985$:

$$F(a/b) = 0,976 + 1,328 \cdot \frac{a}{b} - 9,344 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 34,426 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 55,866 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^4 + 35,211 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^5 \quad (3)$$

Funcția de interpolare polinomială este reprezentată în graficul din figura 6 prin curba albastră.

Se poate observa foarte buna concordanță între valorile obținute prin analiza cu elemente finite și funcția de interpolare.

Expresia obținută pentru factorul adimensional de intensitate a tensiunii F poate fi utilizată pentru calculul factorului de intensitate K_I în structura studiată pentru orice lungime a fisurii exprimată prin raportul a/b cuprins între 0,1 și 0,7.

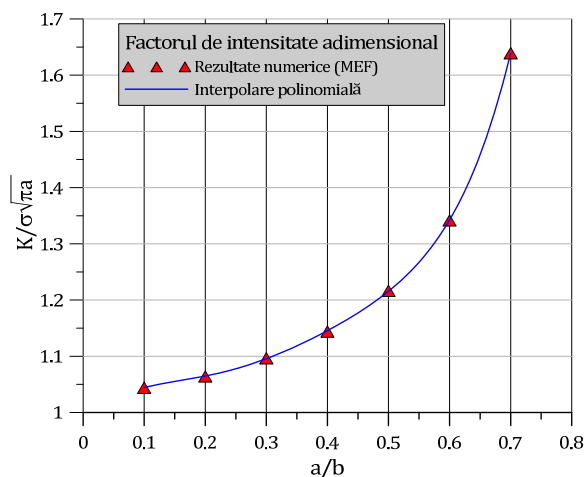


Fig. 6. Variația factorului adimensional de intensitate a tensiunii

5 CONCLUZII

În lucrare se prezintă un studiu cu elemente finite pentru determinarea expresiei generale a factorului de intensitate a tensiunii la vârful unei fisuri aflate într-o placă cu gaură circulară, solicitată de o tensiune îndepărtată uniformă.

Calculul a fost efectuat cu ajutorul programului de elemente finite FRANC2D, specializat pentru analiza structurilor cu fisuri.

Rezultatele numerice obținute în urma analizelor cu elemente finite au fost interpolate pentru a obține o relație generală a factorului de intensitate a tensiunii sub formă polinomială.

Corelația între rezultatele numerice și funcția de interpolare obținută sub forma unui polinom de gradul cinci a fost foarte bună, coeficientul de determinare R fiind foarte aproape de 1.

Relația de calcul obținută poate fi utilizată pentru analiza propagării fisurii și determinarea duratei de viață a plăcii analizate sub acțiunea sarcinilor variabile.

Această metodologie poate fi aplicată oricărei structuri ce conține o fisură și pentru care nu există în literatura de specialitate relații de calcul al factorului de intensitate a tensiunii care să poată fi utilizate pentru evaluarea integrității structurii.

6 BIBLIOGRAFIE

- [1]. Pană, T., Pastramă, Ș.D. (2001), *Integritatea structurilor metalice*, Editura Fair Partners, București, ISBN 9739998437.
- [2]. Rooke, D.P., Cartwright, D.J. (1976), *Compendium of stress intensity factors*, Her Majesty's Stationery Office, London, ISBN 9780117713369.
- [3]. Murakami, Y. (editor) (1987), *Stress Intensity Factors Handbook*, Pergamon Press, Oxford, ISBN 9780080348094.
- [4]. Wu, X.R., Carlsson, J. (1991), *Weight functions and stress intensity factor solutions*, Pergamon Press, Oxford, ISBN 9780080417028.
- [5]. Cartwright, D.J., Rooke, D.P. (1975) – „Evaluation of the Stress Intensity Factors”, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 10, pp. 217–224, ISSN 0309-3247
- [6]. FRANC2D software – accesat în 5 Mai 2017, website: <http://cfg.cornell.edu/software>
- [7]. Irwin, G.R. (1957) – „Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing in a plate” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 24, pp. 361–364, ISSN 0021-8936
- [8]. Barsoum, R. S. (1976) – „On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, No. 1, pp. 25-37, ISSN 1097-0207.

7 NOTAȚII

Următoarele simboluri sunt utilizate în cadrul lucrării:

K = Factorul de intensitate a tensiunii
 $[MPa\sqrt{mm}]$;

F = Factorul adimensional de intensitate a tensiunii

a = semilungimea fisurii centrale [mm]

σ = tensiunea îndepărtată aplicată [MPa]