

DETERMINAREA STĂRII DE TENSIUNE ȘI DEFORMAȚIE ÎNTR-O GRINDĂ DE EGALĂ REZISTENȚĂ SUPUSĂ LA ÎNCOVOIERE SIMPLĂ

DETERMINATION OF STRESS AND STRAIN STATE IN AN EQUAL STRESS BEAM LOADED IN SIMPLE BENDING

DRĂGHICIU Cristian

Facultatea: F.I.I.R., Specializarea: Master SIS, Anul de studii: II, e-mail: draghiciu.cristian95@gmail.com

Conducător științific: Prof. Dr. Ing. Gabriel JIGA

REZUMAT: Scopul lucrării este acela de a crea o aplicație de laborator, cu ajutorul căreia se poate determina pe cale experimentală tensiunea normală maximă σ_x^{\max} , dintr-o grindă de egală rezistență, solicitată la încovoiere simplă. Valoarea obținută pe cale experimentală se va compara cu cea rezultată din calculul numeric precum și cu cea obținută pe cale analitică.

CUVINTE CHEIE: structură, grindă, egală, rezistență, încovoiere.

ABSTRACT: The aim of this paper is to create a laboratory application, through which the maximum normal stress σ_x^{\max} in a equal stress beam loaded in simple bending can be determined experimentally. Then, the value obtained experimentally will be compared with the corresponding one resulting from the numerical calculation as well as with the one obtained analytically.

KEYWORDS: structure, beam, equal, stress, bending.

1. Introducere

La încovoiere simplă, tensiunile sunt repartizate neuniform pe secțiunile transversale ale grinzilor, solicitările maxime apărând în fibrele cele mai îndepărtate de axa în raport cu care se produce încovoierea. În consecință, dacă secțiunea transversală este constantă de-a lungul unei grinzi fixate la unul din capete, atunci materialul este folosit la capacitatea sa maximă numai în dreptul încastrării, celelalte secțiuni fiind supradimensionate. Pentru creșterea eficienței, trebuie să se adapteze mărimea secțiunilor transversale la nivelul solicitării care le corespunde. Pentru creșterea economicității, se pot proiecta grinzi cu secțiune variabilă la care tensiunea normală maximă din fiecare secțiune transversală să fie egală cu rezistență admisibilă, numite grinzi de egală rezistență.

2. Stadiul actual

În vederea realizării acestui deziderat, a fost construit un cadru de susținere a grinzii, prevăzut cu o zonă de fixare a acesteia, la extremitatea liberă fiind adaptat un sistem de aplicare a forței tăietoare și un sistem de măsurare a săgetii. Au fost debitate grinzi de egală rezistență din oțel, utilizându-se o mașină de debitat cu laser.



Fig.1 Grindă de egală rezistență la încovoiere

3. Proiectarea structurii

3.1. Proiectarea cadrului

În funcție de geometria grinzii, a fost proiectat cadrul, acesta suportând numeroase modificări și îmbunătățiri din considerente constructive și de asamblare.

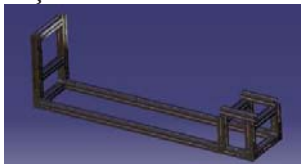


Fig.2 Desenul cadrului de susținere a grinzii realizat în CATIA V5R21

Dimensiunile de gabarit ale cadrului sunt:

- Lungime: 650 mm
- Lățime: 150 mm
- Înălțime: 220 mm

3.2. Proiectarea sistemului de aplicare a forței tăietoare

Pentru aplicarea forței, a fost utilizat un mecanism șurub-piuliță, după cum urmează: un șurub standardizat M8x80 și o piuliță standardizată M8.



Fig.3 Elementele standardizate

Acest sistem a suferit diverse modificări și îmbunătățiri pe tot parcursul desfășurării proiectului.

• Inițial s-a optat pentru varianta în care piulița era încastrată, iar șurubul având o mișcare de avans relativ cu cadrul, aplica o forță concentrată la extremitatea liberă a grinzii. Din considerente strict constructive, cu cât șurubul avansa mai mult, cu atât punctul de aplicare a forței se regăsea pe circumferința unui cerc, a cărui rază creștea proporțional cu avansul șurubului.



Fig.4 Sistemul inițial de aplicare a forței

• A doua variantă constructivă a făcut ca punctul de aplicare a forței la extremitatea liberă a grinzii să nu varieze în funcție de avansul șurubului. Acest lucru este posibil cu ajutorul unui element de ghidare asamblat între extremitatea liberă a grinzii și șurub. Avansul șurubului este posibil prin acționarea piuliței, aceasta având deblocată mișcarea de rotație în jurul axei proprii.



Fig.5 Varianta îmbunătățită a sistemul de aplicare a forței

3.3. Proiectarea sistemului de măsurare a săgeții la extremitatea liberă a grinzii

Pentru măsurarea săgeții la extremitatea liberă a grinzii a fost utilizat un comparator cu precizia de 0.01 mm (10 μm). Pentru asamblarea comparatorului, a fost proiectat un sistem de fixare și orientare al acestuia în raport cu cadrul.



Fig.6 Sistemul de măsurare a săgeții

3.4. Grinda de egală rezistență cu înălțime constantă

3.4.1. Determinarea geometriei grinzii cu înălțime constantă

Înălțimea h a grinzii se consideră constantă, iar lățimea b variind liniar între $(0, \ell)$.

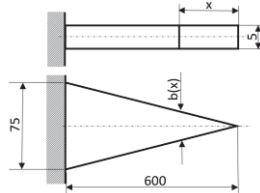


Fig.7 Vederi ale grinzii de egală rezistență la încovoiere

Modulul de rezistență la încovoiere al acestei grinzi, în secțiunea situată la distanța x față de extremitatea liberă a grinzii este:

$$W(x) = \frac{P \cdot x}{\sigma_a} = \frac{h^2 \cdot b(x)}{6} \quad (1)$$

de unde rezultă relația de variație a lățimii grinzii:

$$b(x) = \frac{6P \cdot x}{h^2 \sigma_a} \left| \begin{array}{l} 0 \quad \text{la } x = 0 \\ \frac{6P \cdot L}{h^2 \sigma_a} \quad \text{la } x = L \end{array} \right. \quad (2)$$

prin urmare rezultă o variație liniară a acestei funcții.

Deoarece porțiunea de la extremitatea liberă a grinzii nu poate fi ascuțită (creându-se un concentrator de tensiune) aceasta nu pornește de la o lățime nulă. Din considerente constructive capătul liber al grinzii a fost realizat de formă dreptunghiulară (10 x 20 mm), permițând ca la extremitatea grinzii să poată fi aplicată o forță tăietoare $T_z(x) = \text{constantă}$. Altfel spus, partea de lățime constantă de la capătul grinzii se dimensionează din considerente de rezistență la forfecare.

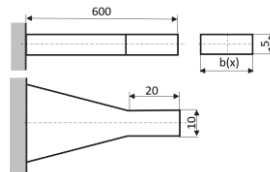


Fig.8 Realizarea extremității libere a grinzii de egală rezistență la încovoiere

Extremitatea încastrată a grinzii trebuie prevăzută cu găuri de fixare pentru a se realiza o încastrare cât mai solidă. Încastrarea trebuie să fixeze în totalitate grinda, să îi preia toate gradele de libertate, și să mențină grinda în poziție orizontală.

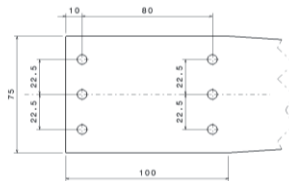


Fig.9 Realizarea capătului încastrat al grinzii de egală rezistență la încovoiere

3.4.2. Proiectarea grinzii cu înălțime constantă

Pentru proiectarea grinzii a fost utilizată aplicația software pentru proiectare asistată de calculator CATIA V5R21. Respectându-se toate constrângerile de proiectare, a fost realizat modelul geometric virtual al grinzii.

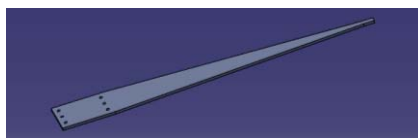


Fig.10 Desenul grinzii de egală rezistență în CATIA V5R21

3.5. Grinda de egală rezistență cu lățime constantă

3.5.1. Determinarea geometriei grinzii cu lățime constantă

Lațimea b a grinzii se consideră constantă, iar înălțimea h variind parabolic între $(0, h)$.

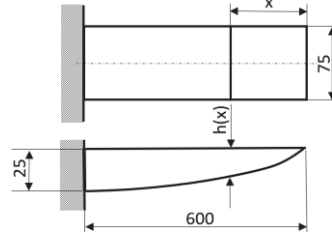


Fig.11 Vederi ale grinzii de egală rezistență la încovoiere

Modulul de rezistență la încovoiere al acestei grinzi, în secțiunea situată la distanța x față de extremitatea liberă a grinzii este:

$$W(x) = \frac{P \cdot x}{\sigma_a} = \frac{h(x)^2 \cdot b}{6} \quad (3)$$

de unde rezultă relația de variație a lățimii grinzii:

$$h(x) = \sqrt{\frac{6P \cdot x}{b \cdot \sigma_a}} \quad \begin{matrix} 0 & \text{la } x = 0 \\ \sqrt{\frac{6P \cdot L}{b \cdot \sigma_a}} & \text{la } x = L \end{matrix} \quad (4)$$

prin urmare rezultă o variație parabolică a acestei funcții.

Grinda se poate construi simetric (formă parabolică bilaterală) sau nesimetric. Din considerente strict constructive, s-a ales a doua variantă. Realizarea practică a grinzii se bazează pe aproximarea profilului parabolic prin trepte de înălțimi diferite (pasul de 5 mm).

3.5.2. Proiectarea grinzii cu lățime constantă

În cazul ideal pentru o grindă de egală rezistență, cu lățime constantă, înălțimea trebuie să varieze parabolic în funcție de lungime. Datorită faptului că realizarea practică a unui astfel de profil este costisitoare, s-a optat pentru aproximarea acestui profil.



Fig.12 Grindă de egală rezistență cu lățime constantă (Cazul ideal)

Ținându-se cont de faptul că profilul parabolic al grinzii trebuie aproximat, iar lungimea totală a acesteia trebuie să fie 600 mm, se va construi un ansamblu de 5 trepte, fiecare având înălțimea de 5 mm. Astfel, prima foaie va avea lungimea de 600 mm, a doua va avea lungimea de 575 mm, a treia va avea lungimea de 500 mm, a patra va avea lungimea de 375 mm, iar a cincia va avea lungimea de 200 mm.



Fig.13 Grindă de egală rezistență cu lățime constantă

4. Realizarea structurii

4.1. Realizarea cadrului

Pentru realizarea cadrului au fost utilizate profile din aluminiu extrudat, având dimensiunile secțiunii transversale prezentate în figura 14.

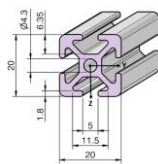


Fig.14 Secțiunea transversală a profilului din aluminiu

Moment de inerție ⁴	Modul de rezistență ³
$I_y = 0,74 \text{ cm}^4$	$W_y = 0,74 \text{ cm}^3$
Moment de inerție ⁴	Modul de rezistență ³
$I_z = 0,74 \text{ cm}^4$	$W_z = 0,74 \text{ cm}^3$
Greutatea	Suprafață profil
$G = 0,49 \text{ kg/ml}$	$A = 1,82 \text{ cm}^2$

4.2. Realizarea sistemului de aplicare a forței tăietoare

Sistemul de aplicare a forței tăietoare a fost realizat prin procedeul de prototipare rapidă, numit și imprimare 3D. Pentru acționare a fost proiectată o roată de manevră, în interiorul căreia a fost încastrată o piuliță standardizată M8.



Fig.15 Încastrarea piuliței

După introducerea piulitei în roata de manevră, a fost atasat mecanismul ce permite doar miscarea de rotație a ansamblului în jurul axei proprii, acesta fiind alcatuit dintr-un rulment radial-axial, o bucsă, o piuliță de blocare și carcasa lagărului.



Fig.16 Lagărul sistemului de acționare

Adițional, s-a optat pentru un al doilea lagăr, utilizat doar pentru orientarea șurubului.



Fig.17 Lagăr orientare șurub

4.3. Realizarea sistemului de măsurare a săgeții la extremitatea liberă a grinzii

Carcasa cadranului se assemblează prin presare în suportul de fixare al ansamblului pe cadrul sistemului. Comparatorul se orientează în poziție verticală, utilizând tubul de ghidare a tijeii palpatorului, acesta fiind blocat în poziție de un „suport Ω ”.

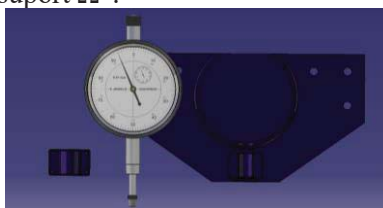


Fig.18 Ansamblul sistemului de măsurare a săgeții la extremitatea liberă a grinzii

4.4. Realizarea grinzii de egală rezistență cu înălțime constantă

Pentru realizarea grinzii de egală rezistență cu înălțime constantă s-a utilizat o foaie din oțel, cu grosimea de 5 mm.

Grinda a fost realizată prin debitarea cu laser a foii din oțel. Din aceeași foaie au fost debitate epruvete pentru determinarea proprietăților de material (modulul de elasticitate longitudinal E și coeficientul de contracție transversală ν). Pentru compensarea efectului termic, a fost aplicat un traductor tensometric pe un alt eșantion confecționat din același material.

4.5. Realizarea grinzii de egală rezistență cu lățime constantă

Pentru realizarea grinzii de egală rezistență cu lățime constantă s-a utilizat aceeași foaie din oțel, cu grosimea de 5 mm.

5. Calculul analitic

5.1 Calculul analitic a grinzii de egală rezistență cu înălțime constantă

Se consideră o grindă în consolă, încărcată cu o sarcină $P = 10 \text{ N}$.

Se cunosc:

- Lungimea grinzii $L = 500 \text{ mm}$
- Înălțimea secțiunii transversale $h = 5 \text{ mm}$
- Modulul de elasticitate longitudinal $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
- Lățimea maximă a secțiunii transversale $\ell = 75 \text{ mm}$

Tensiunea maximă în grindă este:

$$\sigma_{max} = \frac{6 \cdot P \cdot L}{\ell \cdot h^2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 500}{75 \cdot 5^2} = 16 \text{ MPa} \quad (5)$$

Săgeata maximă la extremitatea liberă a grinzii este:

$$\delta_{max} = \frac{6 \cdot P \cdot L^3}{E \cdot \ell \cdot h^3} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 500^3}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 75 \cdot 5^3} = 3,8 \text{ mm} \quad (6)$$

5.2 Calculul analitic a grinzii de egală rezistență cu lățime constantă

Se consideră o grindă în consolă, încărcată cu o sarcină $P = 10 \text{ N}$.

Se cunosc:

- Lungimea grinzii $L = 500 \text{ mm}$
- Lățimea secțiunii transversale $b = 75 \text{ mm}$
- Modulul de elasticitate longitudinal $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
- Înălțimea maximă a secțiunii transversale $h = 25 \text{ mm}$

Tensiunea maximă în grindă este:

$$\sigma_{max} = \frac{6 \cdot P \cdot L}{b \cdot h^2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 500}{75 \cdot 25^2} = 0,64 \text{ MPa} \quad (7)$$

Săgeata maximă la extremitatea liberă a grinzii este:

$$\delta_{max} = \frac{6 \cdot P \cdot L^3}{E \cdot b \cdot h^3} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 500^3}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 75 \cdot 25^3} = 0,03 \text{ mm} \quad (8)$$

6. Calculul numeric

6.1. Calculul numeric a grinzii de egală rezistență cu înălțime constantă

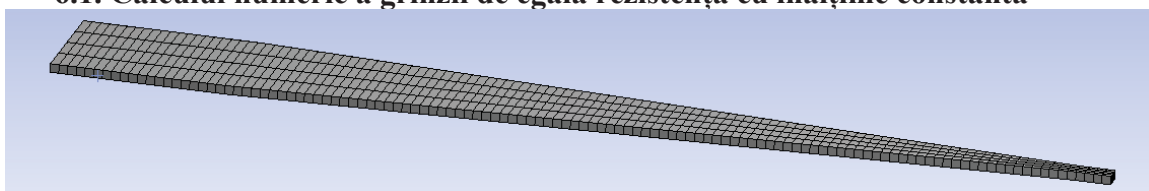


Fig.19 Discretizarea controlată a grinzii utilizând metoda „Face meshing”

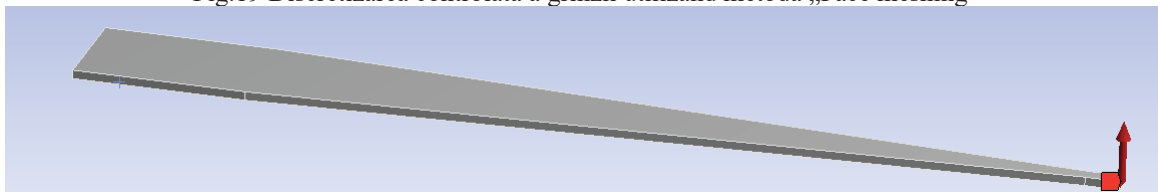


Fig.20 Aplicarea unei forțe concentrate de 10 N la extremitatea liberă a grinzii

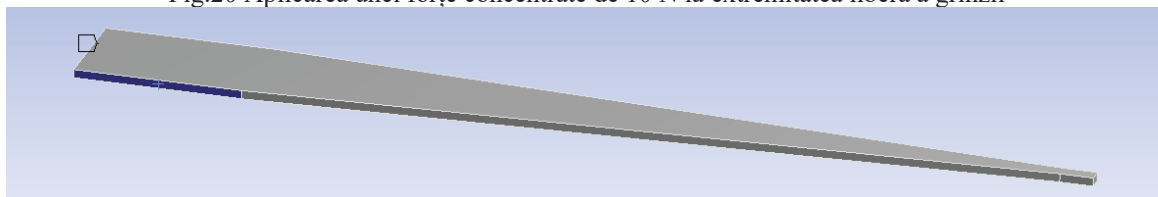


Fig.21 Aplicarea blocajelor în zona de încastrare a grinzii

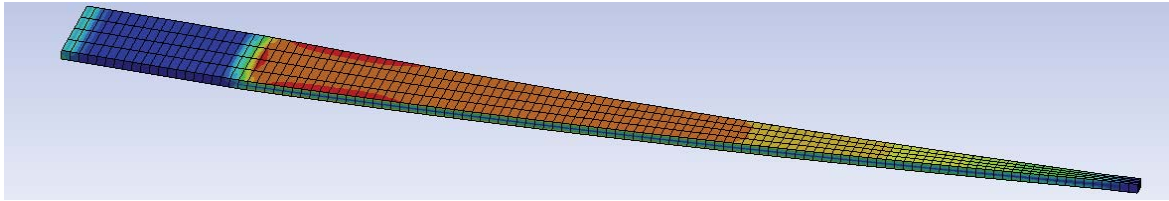


Fig.22 Distribuția stării de tensiune, tensiunea maximă fiind $\sigma_{max} = 17.087$ MPa

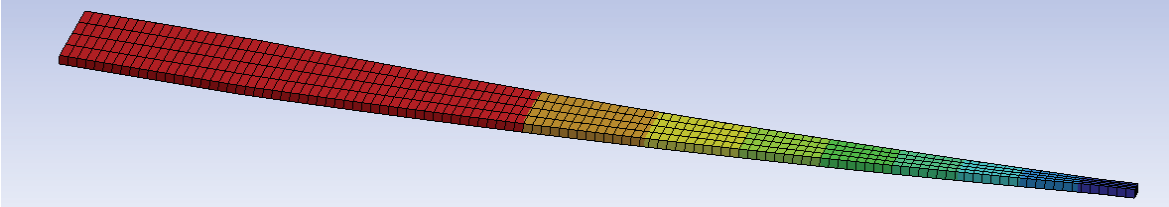


Fig.23 Săgeata la extremitatea liberă a grinzii este $\delta_{max} = 3.747$ mm

6.2. Calculul numeric a grinzii de egală rezistență cu lățime constantă

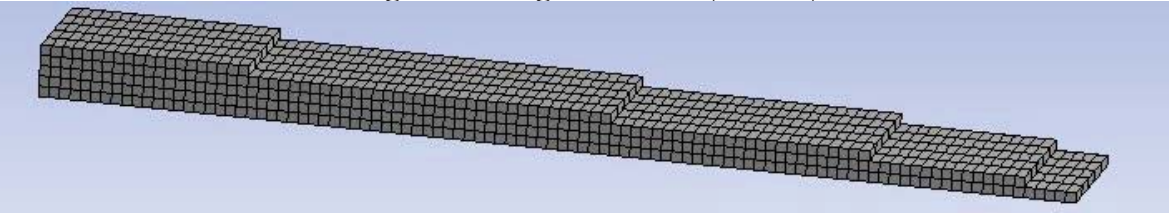


Fig.24 Discretizarea controlată a grinzii utilizând metoda „Face meshing”

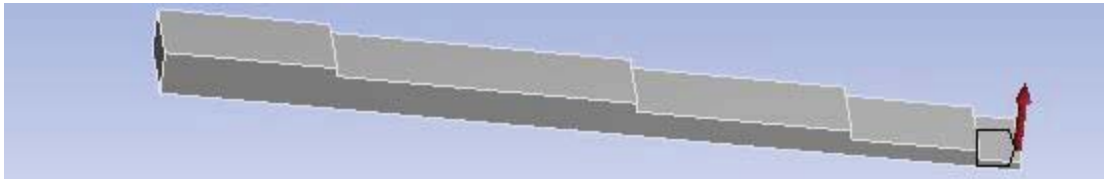


Fig.25 Aplicarea unei forțe concentrate de 10 N la extremitatea liberă a grinzii

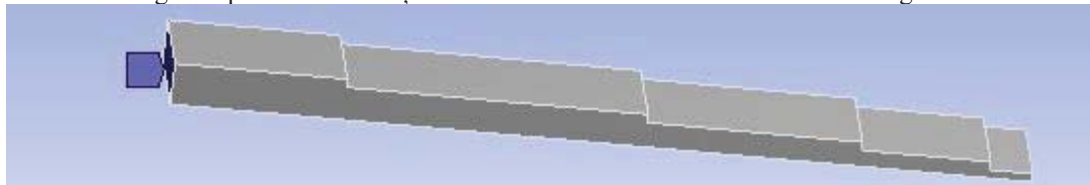


Fig.26 Aplicarea blocajelor în zona de încastrare a grinzii

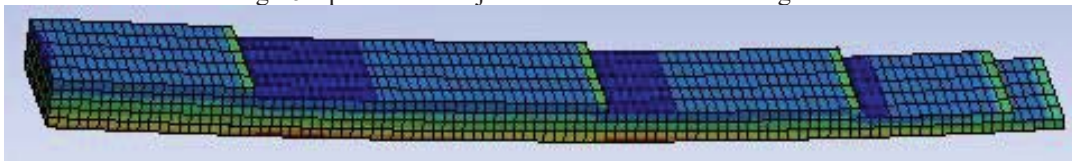


Fig.27 Distribuția stării de tensiune, tensiunea maximă fiind $\sigma_{max} = 0,81$ MPa

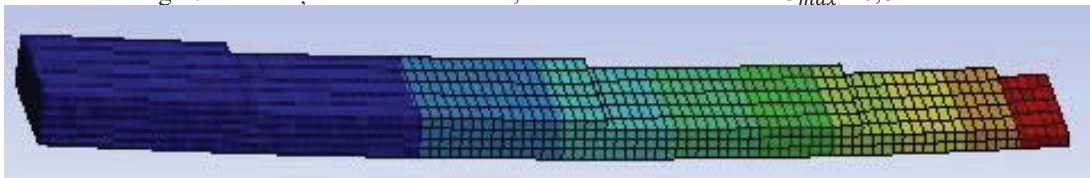


Fig.28 Săgeata la extremitatea liberă a grinzii este $\delta_{max} = 0,039$ mm

7. Concluzii

Din cauza faptului că ansamblul a rămas în incinta facultății, nu au fost finalizate studiile experimentale, pentru compararea rezultatelor cu cele obținute în urma calculului analitic și a celui numeric.

Realizarea practică a grinzii de egală rezistență cu lățime constantă este în curs de desfășurare. Materialul a fost expediat către o firmă specializată pentru efectuarea operațiunii tehnologice de debitare.

Din cauza aproximării profilului parabolic al grinzii de egală rezistență cu lățime constantă, există o eroare între calculul analitic și cel numeric.

8. Bibliografie

- [1]. Pavel TRIPA (1999), *Rezistența materialelor*, Editura Mirton, Timișoara, ISBN 973-578-915-9
- [2]. Galaftion SOFONEA, Adrian Marius PASCU (2007), Editura Universității „Lucian Blaga” din Sibiu, Sibiu, ISBN (13) 978-973-739-362-3
- [3]. <https://mec.tuiasi.ro/rm/incovoiere/7.htm>
- [4]. <https://mec.tuiasi.ro/diverse/FMRM1.PDF>
- [5]. <https://rm.utilajutcb.ro/laboratoare/lab3.pdf>
- [6]. <https://www.youtube.com/watch?v=qV02jy9W78Y>

9. Notății

Următoarele simboluri sunt utilizate în cadrul lucrării:

σ_{max} = Tensiunea maximă [MPa]

δ_{max} = Săgeata maximă [mm]

$W(x)$ = Modulul de rezistență [mm³]

P = Sarcina aplicată [N]

b = Lățimea [mm]

h = Înălțimea [mm]

L = Lungimea [mm]

σ_a = Tensiunea admisibilă [MPa]

E = Modul de elasticitate longitudinal [MPa]