

FINITE DIFFERENCES IN THE STUDY OF MECHANISMS

CUMPĂNĂȘOIU Georgeta-Simona, BUDUȘAN Rareș-Voicu, CROITORU Simona,
FLORESCU Andrei-George
Facultatea: Inginerie Industrială și Robotică, Specializarea: Modelarea și Simularea Sistemelor Mecanice Mobile,
Anul de studii: V, e-mail: simonageo74@yahoo.com

Conducător științific: Ș.l. dr. ing. **Liviu Marian UNGUREANU**, As. dr. ing. **Alexandra ROTARU**

ABSTRACT: The study of computer-based mechanisms is based on the use of finite differences. The numerical derivation of the functions obtained in the analysis and synthesis of the mechanisms is much easier than the analytical derivation. Obtaining the elements of the functional matrix (Jacobian), corresponding to a system of nonlinear equations, with a large number of equations, is done only numerically. In this sense, finite differences are often used in numerical calculation. If a function is given in a table and it is required to calculate the derivative or integral of this function, formulas are used that use the finite differences.

CUVINTE CHEIE: diferențe finite, mecanisme, progresie, regresie

1. Introducere

Studiul mecanismelor cu ajutorul calculatorului se bazează pe utilizarea diferențelor finite. Derivarea numerică a funcțiilor obținute în analiza și sinteza mecanismelor se face mult mai ușor decât derivarea analitică. Obținerea elementelor matricei funcționale (iacobianul), corespunzătoare unui sistem de ecuații neliniare, cu număr mare de ecuații, se face numai pe cale numerică.

În acest sens, diferențele finite sunt utilizate des în calculul numeric. În cazul în care o funcție este dată tabelar și se cere să se calculeze derivata sau integrala acestei funcții, se apelează la formule care folosesc diferențele finite. Chiar și funcțiile date analitic, dar ale căror expresii sunt foarte complicate, se derivează sau se integrează numeric. Majoritatea formulelor de aproximare a funcțiilor prin interpolare au la bază, de asemenea, diferențele finite. Unele metode de integrare a ecuațiilor diferențiale folosesc cu precădere diferențele finite.

2. Diferențe finite progresive (pozitive, la dreapta, înainte)

Fie $f : [a, b] \rightarrow R$ și rețeaua de puncte (noduri) x_0, x_1, \dots, x_n presupuse echidistante, pasul h al rețelei fiind constant ($h = x_{i+1} - x_i, i = \overline{0, n-1}$).

Expresia:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x), \quad (1)$$

poartă numele de diferență finită progresivă de ordinul întâi a funcției $f(x)$ [1].

Diferența finită progresivă de ordinul doi este:

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta f(x)) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \end{aligned} \quad (2)$$

Procedând în mod analog, se găsește diferența finită progresivă de ordinul n , care are forma:

$$\begin{aligned} \Delta^n f(x) &= \Delta(\Delta^{n-1} f(x)) = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x) = \\ &= f(x+nh) - C_n^1 f(x+(n-1)h) + C_n^2 f(x+(n-2)h) + \dots + \\ &+ (-1)^k C_n^k f(x+(n-k)h) + \dots + (-1)^n f(x) \end{aligned} \quad (3)$$

Formula (2.3), de calcul a diferenței finite progresive de ordinul n , poate fi scrisă și sub formele:

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k f(x+(n-k)h); \quad (4)$$

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(x+kh). \quad (5)$$

Dacă funcția este dată numeric, adică se cunosc valorile y_0, y_1, \dots, y_n în nodurile x_0, x_1, \dots, x_n , atunci au loc relațiile:

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= y_{i+1} - y_i; \\ \Delta^2 y_i &= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Delta^n y_i = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k y_{i+(n-k)}$$

În tabelul 1 se prezintă diferențele finite progresive pentru cinci noduri consecutive, începând cu nodul i .

Tabelul 1. Diferențe finite progresive

Nr. nod	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
$i+1$	y_{i+1}	Δy_{i+1}	$\Delta^2 y_{i+1}$	$\Delta^3 y_{i+1}$	
$i+2$	y_{i+2}	Δy_{i+2}	$\Delta^2 y_{i+2}$		
$i+3$	y_{i+3}	Δy_{i+3}			
$i+4$	y_{i+4}				

3. Diferențe finite regresive (negative, la stânga, înapoi)

Expresia:

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h), \quad (7)$$

poartă numele de diferență finită regresivă de ordinul întâi a funcției $f(x)$ [1].

Diferența finită regresivă de ordinul doi este:

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x) &= \nabla(\nabla f(x)) = \nabla f(x) - \nabla f(x-h) = \\ &= f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)\end{aligned}\tag{8}$$

Procedând în mod analog, se găsește diferența finită regresivă de ordinul n , care are forma:

$$\begin{aligned}\nabla^n f(x) &= \nabla(\nabla^{n-1} f(x)) = \nabla^{n-1} f(x) - \nabla^{n-1} f(x-h) = \\ &= f(x) - C_n^1 f(x-h) + C_n^2 f(x-2h) + \dots, \\ &+ (-1)^k C_n^k f(x-kh) + \dots, (-1)^n f(x-nh)\end{aligned}\tag{9}$$

Relația (3.3) poate fi scrisă și sub formele:

$$\nabla^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k f(x-kh);\tag{10}$$

$$\nabla^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(x-(n-k)h).\tag{11}$$

În cazul în care funcția este dată numeric, diferențele finite regresive sunt:

$$\begin{aligned}\nabla y_i &= y_i - y_{i-1}; \\ \nabla^2 y_i &= y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}; \\ &\dots\dots\dots \\ \nabla^n y_i &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k y_{i-(n-k)}\end{aligned}\tag{12}$$

În tabelul 2 se prezintă diferențele finite regresive pentru cinci noduri consecutive.

Tabelul 2. Diferențe finite regresive

Nr. nod	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
$i-4$	y_{i-4}				
$i-3$	y_{i-3}	∇y_{i-3}			
$i-2$	y_{i-2}	∇y_{i-2}	$\nabla^2 y_{i-2}$		
$i-1$	y_{i-1}	∇y_{i-1}	$\nabla^2 y_{i-1}$	$\nabla^3 y_{i-1}$	
i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$

4. Diferențe finite centrale

Diferența finită centrală de ordinul unu a funcției $f(x)$ are forma:

$$\delta f(x) = f(x+h) - f(x-h)\tag{13}$$

Diferența finită centrală de ordinul doi este:

$$\begin{aligned}\delta^2 f(x) &= \delta(\delta f(x)) = \delta f(x+h) - \delta f(x-h) = \\ &= f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)\end{aligned}\tag{14}$$

În mod analog, se determină diferența finită centrală de ordinul n , care are forma:

$$\begin{aligned}\delta^n f(x) &= \delta(\delta^{n-1} f(x)) = \delta^{n-1} f(x+h) - \delta^{n-1} f(x-h) = \\ &= f(x+nh) - C_n^1 f(x+(n-2)h) + C_n^2 f(x+(n-4)h) + \dots + \\ &+ (-1)^k C_n^k f(x+(n-2k)h) + \dots + (-1)^n f(x-nh)\end{aligned}\quad (15)$$

Relația se scrie și sub formele:

$$\delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k f(x+(n-2k)h); \quad (16)$$

$$\delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(x+(2k-n)h). \quad (17)$$

În tabelul 3 se prezintă diferențele finite centrale pentru un număr de 7 noduri.

Tabelul 3. Diferențe finite centrale

Nr. nod	y	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$
$i-3$	y_{i-3}			
$i-2$	y_{i-2}	δy_{i-2}		
$i-1$	y_{i-1}	δy_{i-1}	$\delta^2 y_{i-1}$	
i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$
$i+1$	y_{i+1}	δy_{i+1}	$\delta^2 y_{i+1}$	
$i+2$	y_{i+2}	δy_{i+2}		
$i+3$	y_{i+3}			

5. Folosirea diferențelor finite în sinteza unui mecanism director (care aproximează o curbă)

Se cere să se determine dimensiunile unui mecanism director [3], astfel încât punctul trasor T (Fig. 1) să traseze o dreaptă verticală.

Pentru scrierea ecuațiilor necesare sintezei mecanismului se folosește metoda contururilor [3]. Astfel, pe contururile independente $ABCEA$ și $ABFGA$, precum și pe conturul deschis $ABTA$ se scriu ecuațiile vectoriale:

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{BC} &= \overline{AE} + \overline{EC}; \\ \overline{AB} + \overline{BF} &= \overline{AG} + \overline{GF}; \\ \overline{AB} + \overline{BT} &= \overline{AT}.\end{aligned}\quad (18)$$

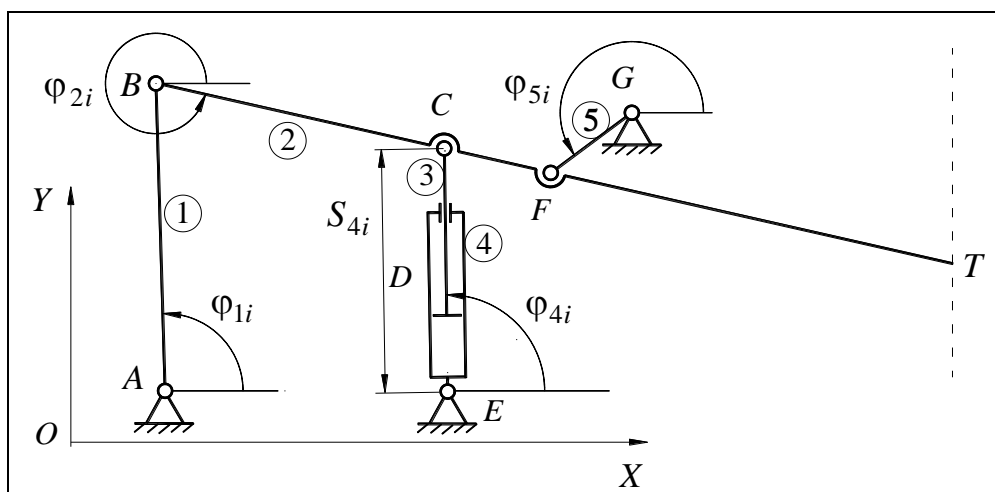


Fig. 1. Schema cinematică a mecanismului

Proiectând ecuațiile vectoriale (18) pe axele de coordonate ale sistemului OXY , se obțin ecuațiile scalare:

$$\left\{ \begin{array}{l} XA + AB \cos \varphi_{1i} + BC \cos \varphi_{2i} - S_{4i} \cos \varphi_{4i} - XE = 0; \\ YA + AB \sin \varphi_{1i} + BC \cos \varphi_{2i} - S_{4i} \sin \varphi_{4i} - YE = 0; \\ XA + AB \cos \varphi_{1i} + BF \cos \varphi_{2i} - FG \cos \varphi_{5i} - XG = 0; \\ YA + AB \sin \varphi_{1i} + BF \sin \varphi_{2i} - FG \sin \varphi_{5i} - YG = 0; \\ XA + AB \cos \varphi_{1i} + BT \cos \varphi_{2i} - XT_i = 0; \\ YA + AB \sin \varphi_{1i} + BT \sin \varphi_{2i} - YT_i = 0; \\ i = \overline{1, p} . \end{array} \right. \quad (19)$$

În cadrul ecuațiilor (19) intervin atât mărimi constante, cât și mărimi variabile. Mărimile constante sunt: $XA, YA, XE, YE, XG, YG, AB, BC, BF, FG, BT$. Mărimile variabile sunt unghiurile $\varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \varphi_{4i}, \varphi_{5i}$ și variabila S_{4i} , din cupla de translație D , unde $i = \overline{1, p}$.

Din bilanțul ecuații-necunoscute, $6p = 11 + 5p$, rezultă $p = 11$, adică se pot impune 11 poziții ale punctului trasor T .

Ecuațiile (19) formează un sistem de 66 ecuații neliniare cu 66 de necunoscute, care se rezolvă printr-o metodă numerică adecvată (metoda Newton-Raphson, metoda gradientului etc.) [1].

Pentru exemplificare, se consideră:

$$XT_i = 2.352 [\text{m}],$$

$$YT_i = 0.223 + 0.084(i - 1) [\text{m}],$$

unde $i = \overline{1, 11}$.

Cu ajutorul ecuațiilor (19) se formează funcțiile sistemului de ecuații neliniare, și anume:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{1i} = XA + AB \cos \varphi_{1i} + BC \cos \varphi_{2i} - S_{4i} \cos \varphi_{4i} - XE; \\ f_{2i} = YA + AB \sin \varphi_{1i} + BC \cos \varphi_{2i} - S_{4i} \sin \varphi_{4i} - YE; \\ f_{3i} = XA + AB \cos \varphi_{1i} + BF \cos \varphi_{2i} - FG \cos \varphi_{5i} - XG; \\ f_{4i} = YA + AB \sin \varphi_{1i} + BF \sin \varphi_{2i} - FG \sin \varphi_{5i} - YG; \\ f_{5i} = XA + AB \cos \varphi_{1i} + BT \cos \varphi_{2i} - XT_i; \\ f_{6i} = YA + AB \sin \varphi_{1i} + BT \sin \varphi_{2i} - YT_i; \\ i = \overline{1, 11} . \end{array} \right. \quad (20)$$

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații (19) este necesară matricea funcțională, care este de forma:

Matricea funcțională a sistemului este:

$$W(x) = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right\|, \quad (21)$$

cu $n = 66$.

Determinarea elementelor matricei funcționale (21) se face cu ajutorul diferențelor finite centrale, utilizate în formulele de derivare numerică, considerând un pas de derivare h .

Elementele matricei funcționale se determină cu ajutorul relației (5.5), după cum urmează:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{f_i(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f_i(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j - h, x_{j+1}, \dots, x_n)}{2h}, \quad (22)$$

$$i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}.$$

Observație: După cum se observă din relația (22), pentru determinarea elementului (i,j) al matricei funcționale a sistemului de ecuații neliniare se dă variație doar variabilei x_j , pe direcția corespunzătoare acesteia.

Folosind observația de mai sus, putem scrie *symbolic* elementele matricei funcționale a sistemului de ecuații neliniare (22), și anume:

$W(X) =$

$$\begin{vmatrix} \frac{f_1(x_1+h, x_2, \dots) - f_1(x_1-h, x_2, \dots)}{2h} & \frac{f_1(x_1, x_2+h, x_3, \dots) - f_1(x_1, x_2-h, x_3, \dots)}{2h} & \dots & \frac{f_1(x_1, x_2 \dots x_n+h) - f_1(x_1, x_2 \dots x_n-h)}{2h} \\ \frac{f_2(x_1+h, x_2, \dots) - f_2(x_1-h, x_2, \dots)}{2h} & \frac{f_2(x_1, x_2+h, x_3, \dots) - f_2(x_1, x_2-h, x_3, \dots)}{2h} & \dots & \frac{f_2(x_1, x_2 \dots x_n+h) - f_2(x_1, x_2 \dots x_n-h)}{2h} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{f_n(x_1+h, x_2, \dots) - f_n(x_1-h, x_2, \dots)}{2h} & \frac{f_n(x_1, x_2+h, x_3, \dots) - f_n(x_1, x_2-h, x_3, \dots)}{2h} & \dots & \frac{f_n(x_1, x_2 \dots x_n+h) - f_n(x_1, x_2 \dots x_n-h)}{2h} \end{vmatrix} \quad (23)$$

unde: $X = \|x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n\|^T, n=66.$

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații neliniare, s-a folosit metoda gradientului.
Rezultatele calculului sunt prezentate în tabelul 5.

Tabel 5. Rezultate calcul

X(1) = -0.024541	X(23) = -0.192416	X(45) = -2.533643
X(2) = -0.068565	X(24) = -0.157303	X(46) = -2.652160
X(3) = 0.596314	X(25) = -0.122363	X(47) = -2.764306
X(4) = -0.074623	X(26) = -0.087609	X(48) = -2.872104
X(5) = 0.684327	X(27) = -0.053034	X(49) = -2.977355
X(6) = 0.689304	X(28) = -0.018622	X(50) = -3.081635
X(7) = 0.760842	X(29) = 0.015657	X(51) = 3.096872
X(8) = 0.592803	X(30) = 0.049841	X(52) = 2.990576
X(9) = 0.590199	X(31) = 0.083981	X(53) = 2.881567
X(10) = 0.193309	X(32) = 0.118140	X(54) = 2.768893
X(11) = 2.451109	X(33) = 0.152395	X(55) = 2.651738
X(12) = 1.609207	X(34) = 1.674869	X(56) = 0.656529
X(13) = 1.629294	X(35) = 1.688938	X(57) = 0.677455
X(14) = 1.645042	X(36) = 1.698510	X(58) = 0.698134
X(15) = 1.656706	X(37) = 1.704236	X(59) = 0.718614
X(16) = 1.664467	X(38) = 1.706608	X(60) = 0.738945
X(17) = 1.668430	X(39) = 1.705987	X(61) = 0.759165
X(18) = 1.668634	X(40) = 1.702634	X(62) = 0.779305

X(19) = 1.665062	X(41) = 1.696729	X(63) = 0.799386
X(20) = 1.657645	X(42) = 1.688391	X(64) = 0.819417
X(21) = 1.646275	X(43) = 1.677693	X(65) = 0.839396
X(22) = 1.630800	X(44) = 1.664673	X(66) = 0.859305

Rezultatele din tabelul 4, obținute în urma rulării programului de calcul, au următoarele semnificații:

- valorile introduse în locațiile 1-11, ale tabloului X, reprezintă dimensiunile elementelor și pozițiile articulațiilor la bază, și anume:

$XA = X(1)$; $YA = X(2)$; $XE = X(3)$; $YE = X(4)$; $XG = X(5)$; $YG = X(6)$; $AB = X(7)$; $BC = X(8)$; $BF = X(9)$; $FG = X(10)$; $BT = X(11)$.

- în locațiile 12-55, ale tabloului X, sunt introduse valorile unghiurilor φ_{1i} , φ_{2i} , φ_{4i} și φ_{5i} , unde $i = \overline{1, 11}$;

- în locațiile 56-66, ale tabloului X, sunt introduse valorile distanțelor S_{4i} , $i = \overline{1, 11}$, dintre articulațiile C și E ale cilindrului hidraulic.

6. Concluzii

În lucrare s-a făcut sinteza unui mecanism pentru aproximarea unei curbe date prin puncte. Pentru sinteza mecanismului s-au folosit diferite metode numerice de calcul, și anume: diferențele finite, derivarea numerică a funcțiilor și metodele numerice de rezolvare a sistemelor de ecuații neliniare. Ecuațiile necesare sintezei mecanismului cu bare articulate s-au obținut pe baza metodei contururilor (Chr. Pelecudi, fondatorul Școlii de Robotică din ROMANIA) [2].

7. Bibliografie

- [1]. Moise, V., Maican, E., Moise, Șt.I.,(2016) *Metode numerice. Aplicații în MATLAB*, Editura Bren, București.
- [2]. Pelecudi, Chr., (1975), *Precizia mecanismelor*, Editura Academiei RSR, București.
- [3]. Moise V., (2018) *Sinteza mecanismelor plane cu bare articulate. Aplicații în MATLAB*, Editura Bren, București.