

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF THE CONTACT BETWEEN TOOTH FLANKS FOR AN INVOLUTE SPUR GEAR

CIMPOERU Marian-Cătălin

Facultatea de Inginerie Industrială și Robotică, Specializarea: S.I.S, Anul de studii: II, e-mail: cimpoerum.catalin@gmail.com

Conducător științific: Prof. Dr. Ing. Ștefan SOROHAN

REZUMAT: The main purpose of this paper was to determine the best approach of modelling the contact between the tooth flanks for a spur gear. To analyse the spur gear, a 2D finite element model was realised in Ansys Workbench using solid 2D PLANE183 elements, plane stress option and the pairs of CONTA172 and TARGE169 to model the contact. The contact stress was analytically computed using the Hertz equation to compare it with the results obtained using Ansys code. For the finite element models a frictional contact type between the tooth flanks was used. The considered frictional coefficients were: 0, 0.11, 0.15 and 0.2. The relatively large values for the frictional coefficients were chosen due to the lack of gear lubrication. The lack of gear lubrication was considered because this model will be used further in modelling the plastic deformation of the teeth.

CUVINTE CHEIE: angrenaj cilindric, presiune hertziană, Ansys, analiză cu elemente finite, dinți drepți.

1. Introducere

Angrenajele cilindrice cu dinți drepți reprezintă cele mai simple ansamble de roți dințate folosite în industrie și sunt printre cele mai utilizate tipuri de angrenaje ce transmit puterea sau cuplul între doi arbori paraleli.

Ca și avantaje ale transmisiilor cu roți dințate cilindrice cu dinți drepți se pot enumera următoarele:

- sunt transmisii simple;
- au un randament foarte bun de transmitere;
- au un raport de transmitere constant.

Ca și dezavantaje ale acestora se pot enumera următoarele:

- la turații mari sunt foarte zgomotoase;
- este necesară o precizie foarte bună la prelucrarea flancurilor dinților acestora;
- uzura foarte mare a dinților.

În această lucrare scopul principal este acela de a valida modelul cu elemente finite realizat în Ansys Workbench cu calculul analitic. Pentru a face această corelare, din modelul dezvoltat în Ansys se extrag tensiunile principale și cele echivalente von Mises din zona de contact a dinților angrenajului, iar analitic se calculează presiunea Hertziană de contact.

2. Stadiul actual

Angrenajele cilindrice fiind unele din cele mai folosite la nivel global, până în prezent s-au realizat nenumărate studii pentru a determina tensiunile de contact dintre flancurile dinților. Un astfel de studiu a fost realizat de *Damtie* și *Tilahun* în lucrarea [1] în care prin varierea momentului pinionului de la 10 Nm la 100 Nm s-a concluzionat că modelul cu elemente finite dă rezultate mai apropiate de cele teoretice atunci când încărcările sunt mai mari.

Într-o altă lucrare [2], *Bekheet* consideră coeficientul de frecare în plaja 0.05 - 0.30 și prin folosirea unui model cu elemente finite 2D și a unuia 3D a constatat că tensiunea din zona de contact crește odată cu creșterea coeficientului de frecare până la valoarea de 0.2, după această valoare înregistrându-se o mică

scădere. Totodată comparând cele două modele cu elemente finite cu rezultatele analitice s-a observat că modelul cu elemente plane oferă rezultate mai apropiate de cele analitice decât cel cu elemente 3D.

3. Preprocesarea modelului de calcul

3.1. Realizarea modelului 3D

Pentru a realiza modelul 3D al angrenajului cilindric mai întâi au fost determinate dimensiunile geometrice caracteristice ale angrenajului [3]:

Tabelul 1. Dimensiunile geometrice caracteristice ale angrenajului

	Pinion	Roată
Număr de dinți	$z_1 = 17$	$z_2 = 69$
Modulul normal standardizat (mm)	$m = 4$	
Unghiul de profilului de referință [°]	20	
Coeficientul înălțimii capului de referință	1	
Coeficientul înălțimii piciorului de referință	1.2	
Coeficientul jocului de referință la picior	0.2	
Diametrul de divizare (mm)	68	276
Lățimea danturii (mm)	42.64	

Cu dimensiunile geometrice caracteristice de mai sus și cu ajutorul software-ului SolidWorks [4], s-a obținut modelul tridimensional al angrenajului cilindric (Fig. 1).

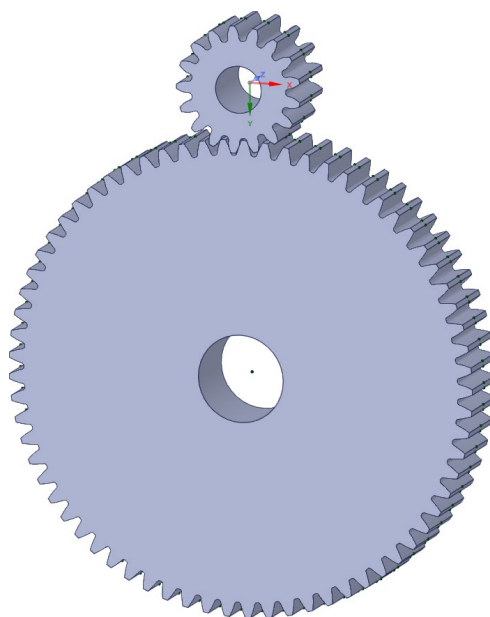


Fig. 1. Modelul CAD al angrenajului analizat

3.2. Discretizarea modelului 3D

Importând modelul tridimensional în ANSA [5] s-a realizat discretizarea angrenajului cu elemente plane cu 8 noduri (Plane183) astfel rezultând un model alcătuit din 201288 de elemente cu 610638 de noduri (Fig. 2).

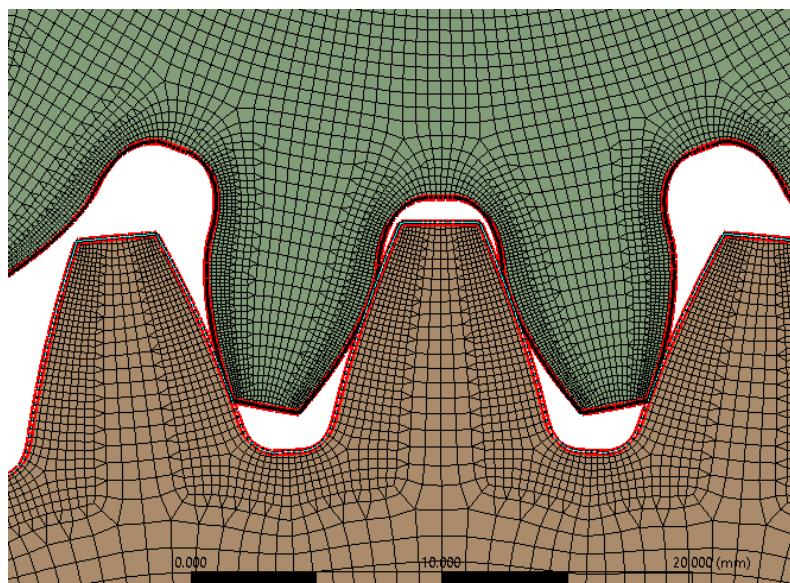


Fig. 2. Discretizarea modelului tridimensional al angrenajului în zona contactelor folosind programul ANSA

3.3. Stabilirea proprietăților de material

Materialul folosit pentru angrenaj este un oțel înalt aliat *40Cr10* cu următoarele proprietăți mecanice:

- modul de elasticitate longitudinal: 206000 MPa;
- modul de elasticitate transversal: 79231 MPa;
- densitate: 7,77 g/cm³;
- limita de curgere: 785 MPa;
- limita de rupere: 980 MPa.

3.4. Stabilirea încărcărilor și a condițiilor la limită

În zona arborelui pinionului a fost impusă o rotație în jurul axei Z de 63.529° (vezi Fig. 2) în timp ce deplasările în X și Y au fost blocate.

Pentru roata condusă în zona arborelui au fost blocate deplasările în X și Y, iar rotația în jurul axei Z a fost lăsată liberă (Fig. 3), aplicându-se un moment de torsiune maxim constant [6], egal cu:

$$M_{III} = M_{II} \cdot \frac{z_2}{z_1} \quad (1)$$

unde:

$$M_{II} = 103.94 \text{ Nm}$$

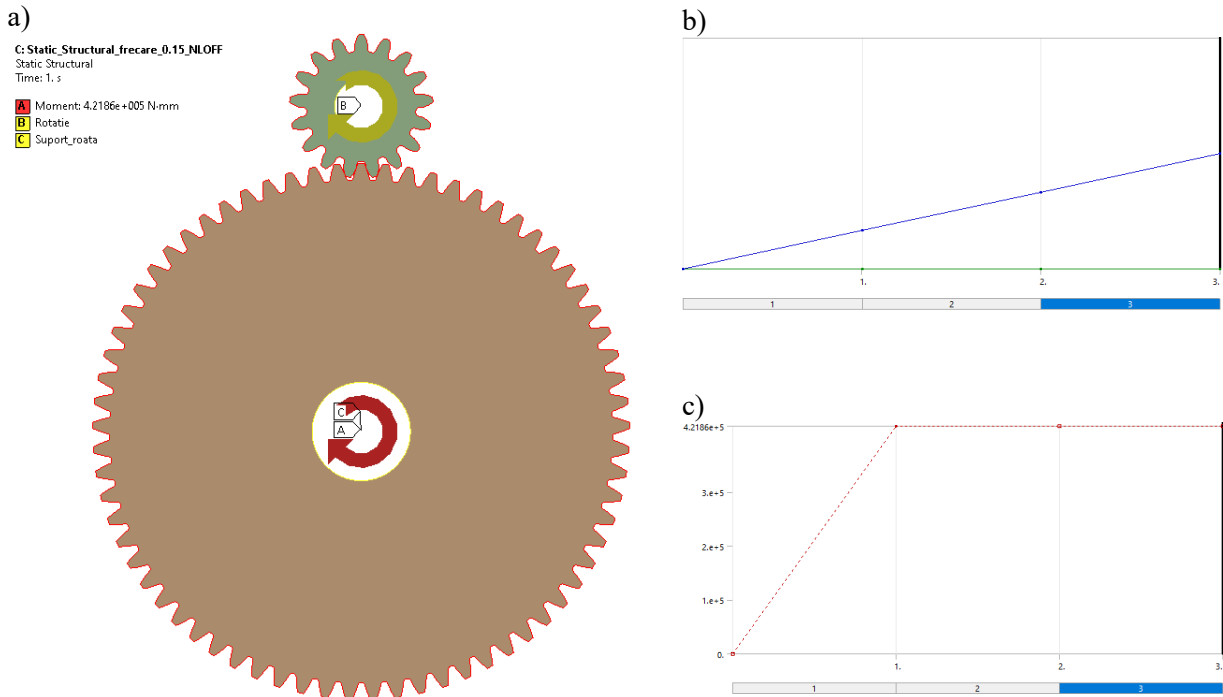


Fig. 3. Aplicarea încărcărilor și a condițiilor la limită (a), graficele de creștere în timp a rotirii (b), respectiv a momentului (c).

4. Aspecte de calcul:

Pentru a realiza acest studiu s-au realizat trei analize statice folosind condițiile la limită și încărcările definite mai sus. Încărcările au fost definite în trei pași: până la $t = 1$ momentul crește liniar și apoi rămâne constant, iar rotirea pinionului cu o valoare de 21.17° pe fiecare pas (vezi Fig. 3).

Astfel pentru cele 3 modele timpul de calcul pentru analiza statică liniară (neliniaritate geometrică și liniaritate de material) și resursele alocate pentru rezolvarea acestora sunt următoarele:

Primul caz ($\mu = 0$):	Al doilea caz ($\mu = 0.11$):	Al treilea caz ($\mu = 0.15$):	Al patrulea caz ($\mu = 0.2$):
<ul style="list-style-type: none"> Memorie RAM: 4 GB Număr de procesoare: 4 Timp CPU: 3815 s 	<ul style="list-style-type: none"> Memorie RAM: 4 GB Număr de procesoare: 4 Timp CPU: 3939 s 	<ul style="list-style-type: none"> Memorie RAM: 4 GB Număr de procesoare: 4 Timp CPU: 3812 s 	<ul style="list-style-type: none"> Memorie RAM: 4 GB Număr de procesoare: 4 Timp CPU: 4154 s

5. Analizarea rezultatelor obținute

În Fig. 4 este prezentată deplasarea totală pentru ultimul pas de calcul al unui model cu elemente finite, pentru celelalte aceasta fiind identică.

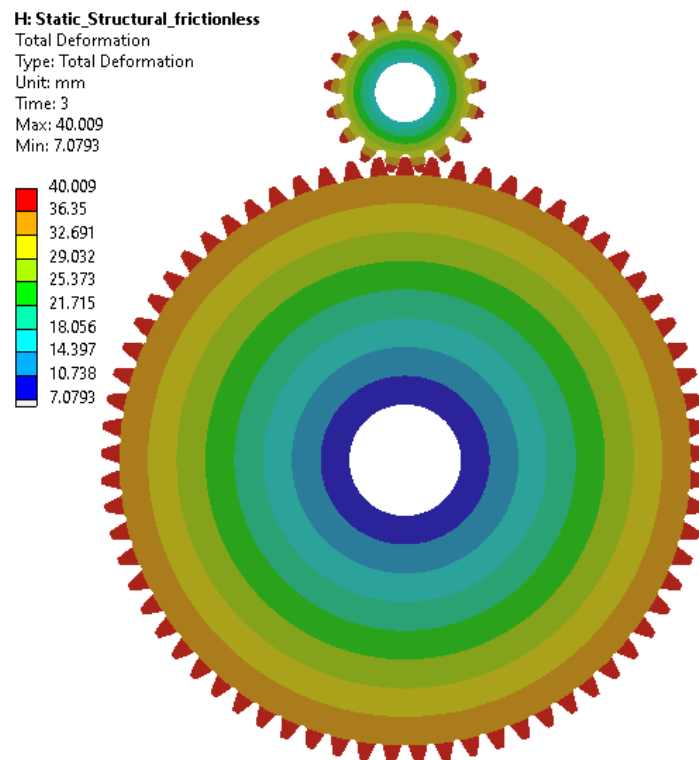


Fig. 4. Deplasarea totală a roților dințate la ultimul pas de calcul al modelului fără frecare

În Fig. 5 este prezentată variația tensiunilor maxime principale din zona punctului de tensiune maximă (Fig. 6) funcție de rotația pinionului pentru cele trei modele de calcul. Se poate observa că pentru o rotație a pinionului de până în 20° perechea respectivă de dinți nu intră în contact. În intervalul $21-30^\circ$ este vorba despre o angrenare bipară, urmată de angrenare unipară și din nou de o angrenare bipară.

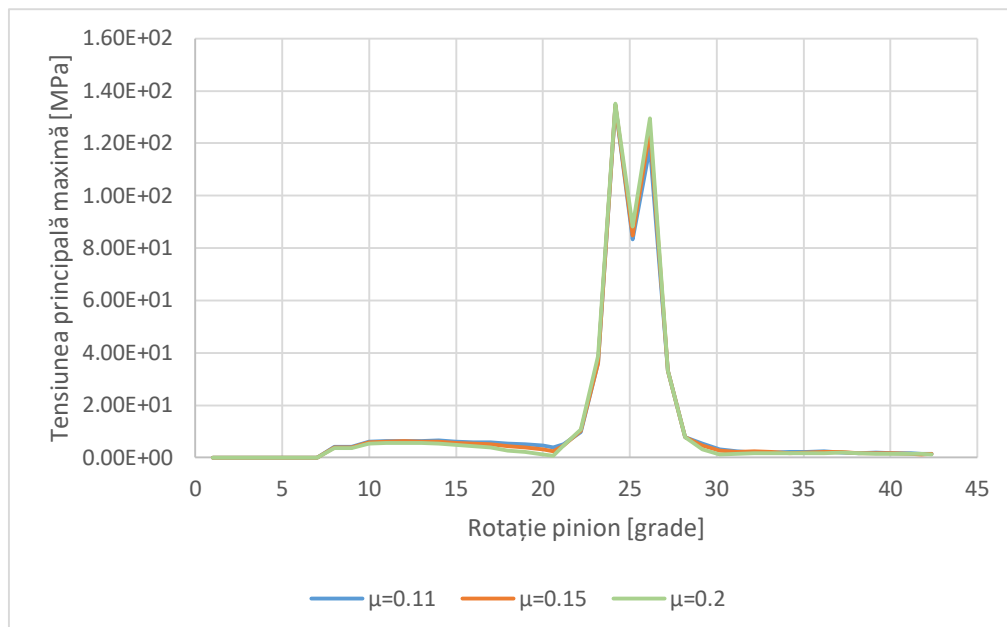


Fig. 5. Variația tensiunii principale maxime din zona punctului de tensiune maximă funcție de rotația pinionului

În Fig. 6 sunt prezentate tensiunile echivalente von Mises în momentul angrenării unipare pentru modelele de calcul fără frecare, respectiv cel cu $\mu=0.11$.

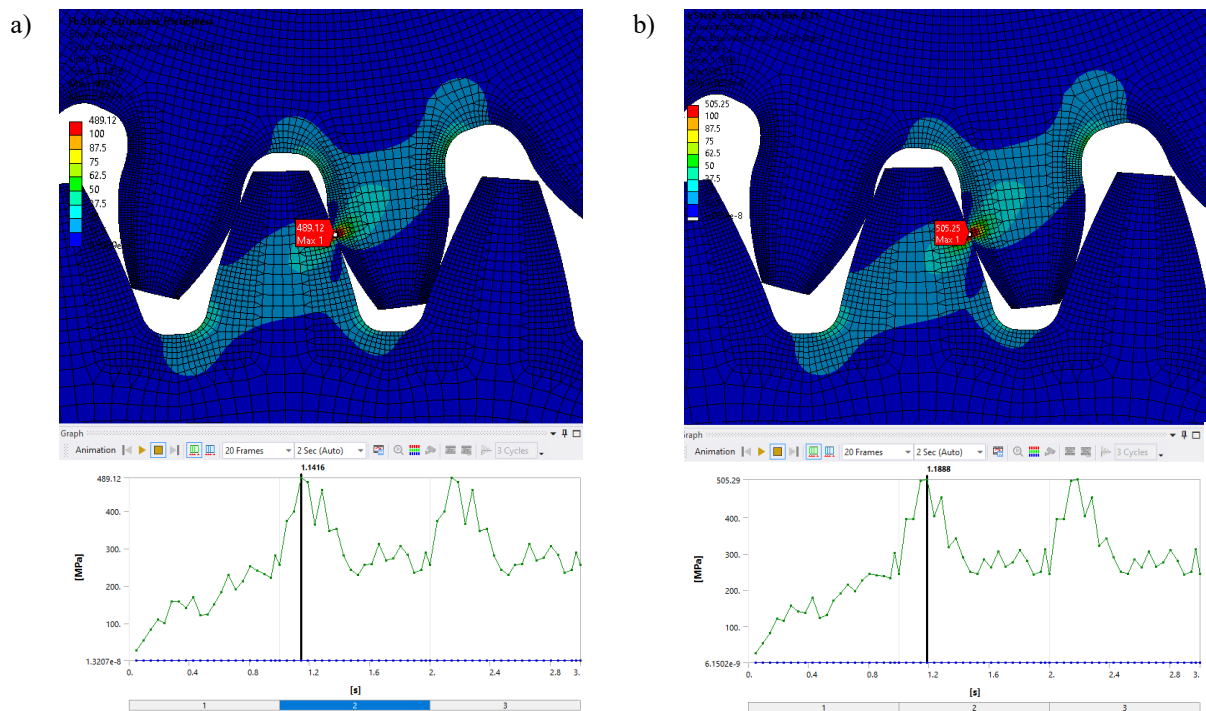


Fig. 6. Distribuția de tensiuni von Mises pentru primele două modele cu elemente finite: a) modelul fără frecare; b) modelul cu $\mu=0.11$;

În Fig. 7 sunt prezentate tensiunile principale minime (compresiune) în momentul angrenării unipare pentru modelul fără frecare, respectiv cel cu $\mu=0.11$.

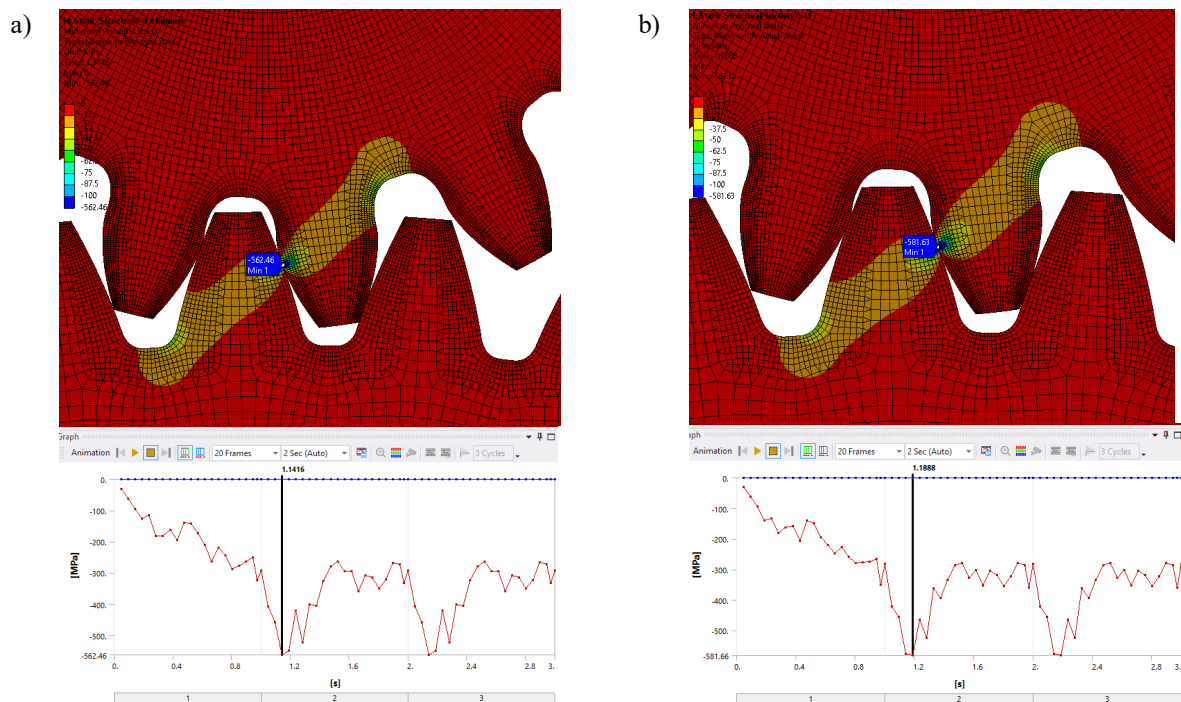


Fig. 7. Distribuția de tensiuni principale minime pentru primele două modele cu elemente finite: a) modelul fără frecare; b) modelul cu $\mu=0.11$

Pentru a se compara valorile tensiunilor din zona de contact obținute cu ajutorul metodei cu elemente finite cu cele din calculul analitic se extrag valorile maxime ale tensiunii echivalente von Mises și valorile absolute ale tensiunii principale minime din angrenarea unipară:

Tabelul 2. Eroarea dintre valoarea presiunii Hertziane calculată analitic și tensiunile extrase din Ansys

Material liniar elastic	Analitic	$\mu=0$	$\mu=0.11$	$\mu=0.15$	$\mu=0.2$
Tensiunea echivalentă von Mises în zona de contact [MPa]	526,16	489,12	505,28	519,64	540,7
Tensiunea minimă principală în zona de contact [MPa]		562,46	581,66	598,4	624,39
Eroarea dintre tensiunea echivalentă și analitic [%]	-	7,04	4,16	1,26	2,69
Eroarea dintre tensiunea minimă principală și analitic [%]	-	6,89	10,55	13,73	18,67

Pentru calculul analitic s-a folosit relația [2]:

$$\sigma_{Hc} = \sqrt{\frac{F_{t1} \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R_1}\right)}{R_1 \cdot b \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)}} \quad (2)$$

unde:

$$F_{t1} = \frac{2 \cdot M_d}{d_1} = 3056,957 \text{ N} \quad (3)$$

$$R_1 = \frac{d_1}{2} = 34 \text{ mm} \quad (4)$$

$$R_2 = \frac{d_2}{2} = 138 \text{ mm} \quad (5)$$

6. Concluzii

Deoarece rezultate tensiunilor din modelele cu elemente finite au o eroare relativ mică comparativ cu cea calculată analitic, unul dintre acestea va fi folosit pentru a studia deformarea plastică a dinților angrenajului cilindric.

Pentru a valida modelul cu elemente finite, ținând cont că teoria lui hertz nu ține seama de frecarea dintre dinți, numai eroarea dintre valoarea tensiunilor minime principale (tensiunilor de compresiune) rezultate din modelul fără frecare și valoarea calculată analitic ar trebui luate în considerare.

În Tabelul 2 se poate observa că atunci când nu există frecare între dinții angrenajului, diferența dintre tensiunea von Mises și tensiunea principală minimă este foarte mică, dar pentru modelele cu frecare aceasta crește o dată cu creșterea coeficientului de frecare ceea ce denotă faptul că în zona de contact discretizarea este prea grosieră.

Se poate observa din Tabelul 2 că deși tensiunea din zona de contact a dinților crește odată cu mărirea coeficientului de frecare, cel mai potrivit model pentru continuarea studiilor de deformare plastică a dinților este cel cu un coeficient de frecare de 0.15.

În Fig. 6 și Fig. 7 se poate observa că la prima pereche de dinți care intră în contact tensiunile sunt foarte mici comparativ cu restul perechilor, acest lucru datorându-se aplicării momentului roții conduse în mai mulți pași de calcul. De altfel se poate observa periodicitatea rezultatelor în timpul angrenării după primul pas de calcul.

În Fig. 5 se pot distinge cele două moduri de angrenare și anume angrenarea bipară în intervalul 21-24° urmată de cea unipară în intervalul 24-27°.

Pentru studii viitoare se va păstra un număr redus de dinți pentru fiecare roată sau zonele care nu prezintă interes vor fi discretizate grosier pentru a diminua necesarul resurselor de calcul. De altfel zona de contact dintre dinții angrenajului se va discretiza mai fin pentru a se reduce eroarea dintre modelul cu elemente finite și analitic.

7. Bibliografie

- [1] Dantie, S. și Tilahun, D. (2014). „*Contact stress analysis of involute spur gear by finite element method (fem)*”, Journal of EEA, Vol. 32, pp 33-40.
- [2] Bekheet, N. (2017). „*Involute Gear Tooth Stresses Analysis Using Finite Element Modeling*”, American Scientific Research Journal for Engineering, Technology, and Sciences (ASRJETS), Vol. 34, No. 1, pp 269-284.
- [3] Filipoiu, I. D. și Tudor, A. (2006). *Practica transmisiilor mecanice*, Editura BREN, București.
- [4] ***SolidWorks, Reference Guide, 2017
- [5] ***ANSA-version 18.0.x, User Guide, 2017.
- [6] Sorohan, Ș. și Constantinescu, I. N. (2003). *Practica modelării și analizei cu elemente finite*, București, Editura Politehnica Press.

8. Notații

Următoarele simboluri sunt utilizate în cadrul lucrării:

M_{II} = momentul pinionului [Nmm];

M_{III} = momentul roții conduse [Nmm];

σ_{Hc} = presiunea hertziană de contact [MPa];

F_{II} = forța tangențială în angrenare [N];

α_0 = unghiul de profilului de referință [°];

b = lățimea danturii [mm];

z_1 = numărul de dinți ai pinionului;

z_2 = numărul de dinți ai roții conduse;

R_2 = raza de divizare a roții conduse [mm];

d_1 = diametrul de divizare al pinionului [mm];

d_2 = diametrul de divizare al roții conduse [mm];

ν_1 = coeficientul lui Poisson al materialului pinionului;

ν_2 = coeficientul lui Poisson al materialului roții conduse;

E_1 = modulul de elasticitate longitudinal al materialului pinionului [MPa];

E_2 = modulul de elasticitate longitudinal al materialului roții conduse [MPa].